

ブラックホール応答理論

改訂試作版

森川億人

小川翔也

廣瀬拓哉

Black-Hole Response Theory

Revised Draft

Okuto Morikawa Shoya Ogawa Takuya Hirose

August 2026

ChatGPT による書評

以下は、制作に先立ち、本原稿を ChatGPT に読ませた際に得られた書評である。

結論から言うと、本当に奇妙です。ただし、散漫だから奇妙なのではありません。一本の原理を異常なほど忠実に追いつけた結果として奇妙になっています。

英語扉で *Black-Hole Response Theory / Revised Draft* と名乗っていますが、実際には「普通のブラックホール摂動論の教科書」ではなく、一つの物理的主張を教科書の形式で展開した小さなモノグラフに近いです。

総合すると、現状は「標準的な学部教科書」としてならまだ完成度は7割くらいですが、研究者が自分の物理観を一冊の教育的論理へ圧縮したモノグラフとしては、かなり完成度が高いです。

そして一番大事なのは、この本を普通にしない方がいいと思います。

— ChatGPT

ChatGPT への「回答」

*What would remain if modern theoretical physics were compressed
to a Landau minimum?*

— 森川億人

序文

吾生也有涯，而知也無涯。以有涯隨無涯，殆已。

— 『莊子』内篇「養生主」

ブラックホールに外力を加えると、波の一部は地平面へ吸収され、一部は外部へ放射される。外部領域だけを系とみなせば、ブラックホールは開いた系である。したがって、その摂動を閉じた系の固有振動だけで記述することはできない。本書は、ブラックホールの線形摂動を、因果的な応答の理論として組み立てる。

本書の基本対象は、外力を応答へ写す因果的な演算子である。第一章と第二章で幾何学と場を準備し、第三章でこの演算子を定義する。その後は、同じ演算子を周波数平面、時間領域、量子論の順に読む。用語を先に並べるのではなく、必要な量を定義したあとで、その物理的意味を述べる。

この順序により、古典場の散乱、減衰する共鳴、量子場の揺らぎ、孤立量子系の熱化を一つの応答理論として接続する。ただし、後の概念を前半の説明へ持ち込まない。各章は、それ以前に定義した量だけを前提として読むことができるように構成する。

原理

ブラックホール応答理論の基本対象は、周波数の一覧ではなく、物理的な源を観測される応答へ写す因果的な演算子である。

想定する読者

本書は、学部四年生が順に読めることを基準にする。解析力学、電磁気学と波動方程式、量子力学、熱・統計力学の標準的な学部課程を既習とし、一般相対論については計量、共変微分、Schwarzschild 解を見たことがある程度を想定する。ブラックホール摂動論、非自己共役スペクトル、曲がった時空の量子場、ETH は前提にしない。

本書は自己完結した数学書を目指さない。特殊関数と超幾何関数は、標準的な微分方程式の解として「初等的な計算」に含めて用いる。一方、解析接続、積分路変形、複素スケーリング、双直交展開、Riesz 輪郭積分のように、結論が技法の選び方へ依存するものは、初出箇所まで仕組み、成立条件、数値的な判定基準を説明する。必要な結果を証明しない場合は仮定と参照先を明記する。この意味での自己整合性を、本書の可読性と

する。

本文は参考文献を除いて百頁程度を編集上の目安とするが、厳密な上限にはしない。定義の順序や因果関係を壊して一頁を削ることはせず、主線から外れる一般論を削ることとで長さを制御する。

物理ミニマム

本書の編集原理は、物理的な主線を保つための最小限である。一般相対論、散乱理論、非自己共役作用素、量子場理論、量子統計のすべてを網羅することはない。各概念は、ブラックホールの応答を一段先へ進める場所だけで導入する。

本文に残す内容は、少なくとも次の一つを満たさなければならない。

- (i) 外力と応答の関係を定める。
- (ii) 時間発展を支配する解析構造を定める。
- (iii) 表示に依存する量と観測量を分ける。
- (iv) 古典応答を量子統計の量へ接続する。

この基準を満たさない一般論、長い分類、技法の比較、将来の拡張は、付録または研究問題へ移す。既知の結果であっても主線に不要ならば削り、未完成の研究を本文の結論として先取りしない。

研究問題

本書では、定型的な練習問題を多数置かない。各部に少数の研究問題を置き、本文で完成させなかった計算や、これから行うべき研究をそこへ送る。回転ブラックホールの数値応答、宇宙論的地平面をもつ系の連続応答、共鳴の高次縮退、対称性を分解した熱化の検証は、いずれも一つの研究問題になりうる。

研究問題には、本文から従うことと、まだ保証されていないことを区別して記す。解答が既知のものについても、完全解答ではなく出発点と判定基準を与えるにとどめる。問題を解くことは本文の理解の確認ではなく、本文の外へ出ることである。

本書の構成

第一部では、亀座標とマスター場から因果的応答を構成する。第四章で準固有振動を定義し、第五章で合体後のリングダウンを含む時間波形を扱う。ここでブラックホール摂動論を古典場の応答理論として完成させる。

第二部では、発散する共鳴波を数値的に扱う方法を第六章で定義し、二つの共鳴が固有ベクトルごと合体する場合を第七章で定義する。第三部では、マスター場を量子化し、地平面の熱性、熱平衡の二点関数、固有状態熱化仮説をこの順に導入する。

本書はブラックホールの情報問題、量子カオス、量子情報を網羅する本ではない。それらが応答関数に直接触れる場所だけを扱う。この制限によって、古典場から量子統計までを一つの論理で通し、最後に表示を越えて残る応答不変量へ戻る。

Codex との協働

本書の構想、章立て、説明順序、章頭引用の選定、初稿の作成、 $\text{\LaTeX}$ 組版、および全体の自己整合性の確認には、OpenAI の AI システムである Codex を継続的に用いた。Codex は単なる校正手段ではなく、構成上および編集上の対話相手として、本書の形成に参加した。

物理的内容の採否、数式と引用の検証、最終的な記述、および刊行物に対する責任は、森川億人、小川翔也、廣瀬拓哉が負う。

森川億人・小川翔也・廣瀬拓哉

2026 年 8 月 19 日

記号を読む前に

舉一隅不以三隅反，則不復也。

— 『論語』述而篇 7.8

本書は式の導入を急ぐ。記号の意味は最初に現れる場所で定め、一般論を先回りして説明しない。異なる章で同じ記号を使うときは、古典論と量子論で同じ役割を担うように選ぶ。

序文の章構成は見取り図である。本文では、専門語を原則として定義より前に用いない。やむを得ず後章の量を予告するときは、定義する章を明記する。

青緑の枠は全体を貫く原理、赤い枠は定義域、解析接続、漸近条件に関する注意である。灰色の枠は研究問題を表す。研究問題を除き、本文は順に読めば閉じるようにした。

目次

序文	iv
記号を読む前に	vii
第 I 部 古典場の応答	1
第 1 章 亀座標	2
1.1 ブラックホールは開いた波動系である	2
1.2 静的球対称時空	2
1.3 動径光線から亀座標を導く	3
1.4 地平面を横切る座標	4
1.5 Schwarzschild 時空	4
1.6 スカラー波動方程式の一次元化	5
1.7 時間規約と放射条件	6
1.8 二つの地平面をもつ場合	7
1.9 本章の結論	8
第 2 章 マスター場	9
2.1 幾何学から一つの場合へ	9
2.2 重力摂動の最小限	9
2.3 源と観測量	11
2.4 回転時空について何を残すか	12
2.5 本章の結論	12
第 3 章 レゾルベント	13
3.1 先に応答を問う	13
3.2 二つのレゾルベント	13
3.3 因果的 Fourier–Laplace 変換	14
3.4 Jost 解	15
3.5 Green 核の構成	15

3.6	散乱係数と流束	16
3.7	解析接続された応答	17
3.8	積分路を変形する	17
3.9	本章の結論	18
第 4 章	準固有振動	19
4.1	三つの同じ定義	19
4.2	単純極と留数	20
4.3	空間的発散と時間的減衰	20
4.4	減衰の向きを決めるエネルギー	21
4.5	一つの可解な障壁	21
4.6	光子球極限	22
4.7	数値計算の判定基準	22
4.8	本章の結論	23
第 5 章	時間応答	24
5.1	リングダウンとは何か	24
5.2	初期値問題を周波数へ移す	25
5.3	積分路が波形を分ける	26
5.4	QNM 展開の範囲	26
5.5	分岐切断の不連続性	27
5.6	源から観測者まで	27
5.7	本章の結論	27
第 II 部	共鳴のスペクトル	29
第 6 章	複素スケーリング	30
6.1	流出波を減衰波へ変える	30
6.2	回転した演算子	31
6.3	離散極と離散化された連続成分	31
6.4	連続準位密度	32
6.5	数値計算で残す三つの検査	32
6.6	本章の結論	32

第 7 章	例外点	34
7.1	二つの共鳴が一つになる	34
7.2	最小の二行列模型	34
7.3	個別留数の破綻	35
7.4	Riesz contour moment	35
7.5	Laurent 演算子	36
7.6	幾何学的位相	37
7.7	実周波数応答は滑らかでありうる	37
7.8	本章の結論	37
第 III 部	量子化された応答	39
第 8 章	マスター場の量子化	40
8.1	同じ作用を量子論で読む	40
8.2	遅延 Green 関数は交換子である	40
8.3	状態を含む二点関数	41
8.4	散乱モードによる展開	42
8.5	三つの真空	42
8.6	本章の結論	42
第 9 章	地平面の熱性	44
9.1	近地平面は Rindler 時空である	44
9.2	Kruskal 座標と解析性	44
9.3	greybody factor の再登場	45
9.4	Euclid 時間による同じ温度	46
9.5	面積エントロピーと第一法則	46
9.6	状態の違い	47
9.7	本章の結論	47
第 10 章	熱的 Green 関数	48
10.1	KMS 条件	48
10.2	Lehmann 表示	49
10.3	スペクトル関数と揺らぎ	49
10.4	吸収と放出	50

10.5	QNM と熱極を混同しない	50
10.6	回転する熱平衡	51
10.7	本章の結論	51
第 11 章	固有状態熱化仮説	52
11.1	一つの固有状態は熱いか	52
11.2	行列要素からスペクトル関数へ	53
11.3	対称性を先に分ける	53
11.4	高次形式対称性は観測量の範囲を変える	54
11.5	量子場理論とブラックホール応答の接点	54
11.6	物理ミニマムとしての範囲	55
11.7	本章の結論	55
第 12 章	応答の不変量	56
12.1	表示を変えても残るもの	56
12.2	何を比較するか	56
12.3	因果律が与える分散関係	57
12.4	古典から量子統計までの一本の式	58
12.5	物理ミニマムの境界	59
12.6	結語	59
付録 A	記法と規約	60
A.1	時空と単位系	60
A.2	Fourier 規約	60
A.3	演算子とレゾルベント	60
A.4	Jost 解と Wronskian	61
A.5	略号	61
A.6	量子二点関数	61
A.7	複素解析上の注意	61
	改訂試作版について	63
	索引	67

第Ⅰ部

古典場の応答

第 1 章

亀座標

“Put off thy shoes from off thy feet, for the place whereon thou standest is holy ground.”

— Exodus 3:5, King James Version

1.1 ブラックホールは開いた波動系である

力学において一般化座標を選ぶ目的は、同じ運動を別の記号で書くことではない。拘束や対称性を座標そのものに反映させることにある。ブラックホール摂動論で同じ役割を果たすのが亀座標である。

遠方からブラックホールへ波束を送る。一部は有効ポテンシャルで反射され、一部は地平面を通過する。一度地平面へ達した信号は外部領域へ戻らない。したがって、外部領域だけを系とみなすと、エネルギーは二つの漸近端へ流出する。これは箱の中の定常波ではなく、二端点をもつ散乱問題である。

本章では幾何学単位系

$$G = c = 1 \quad (1.1)$$

を用い、計量の符号を $(-, +, +, +)$ とする。 G は Newton 定数、 c は光速度である。必要になる背景時空は、まず静的かつ球対称なものに限る。

1.2 静的球対称時空

外部領域の計量を

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (1.2)$$

と書く。 t は静的時刻、 r は面積半径であり、

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (1.3)$$

は単位二次元球面の計量である。関数 $f(r)$ が単純零点 $r = r_h$ をもつとする。すなわち、

$$f(r_h) = 0, \quad f'(r_h) \neq 0, \quad (1.4)$$

である。プライムは r による微分を表す。 r_h は Killing 地平面の半径である。

計量 (1.2) では $g_{rr} = f^{-1}$ が地平面で発散する。しかし、これは曲率が発散するという意味ではない。静的座標が、地平面を横切る光線の記述に適していないのである。波動方程式の境界条件を定める前に、この座標上の見かけを取り除く必要がある。

1.3 動径光線から亀座標を導く

角度を固定した動径零測地線では、 $d\Omega = 0$ および $ds^2 = 0$ である。したがって、式 (1.2) から

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{f(r)} \quad (1.5)$$

を得る。ここで、動径座標 r の代わりに r_* を

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{f(r)} \quad (1.6)$$

によって定義する。 r_* を亀座標とよぶ。加法定数は任意であり、散乱振幅の位相規約に対応する。

式 (1.5) は

$$\frac{dt}{dr_*} = \pm 1 \quad (1.7)$$

となる。したがって、

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_* \quad (1.8)$$

をそれぞれ遅延時刻、先進時刻と定義すれば、外向き光線では u が一定、内向き光線では v が一定である。

地平面の近傍で $f(r)$ を一次まで展開すると、

$$f(r) = f'(r_h)(r - r_h) + O((r - r_h)^2) \quad (1.9)$$

である。式 (1.6) を積分して、

$$r_* = \frac{1}{f'(r_h)} \log |r - r_h| + O(1) \quad (1.10)$$

を得る。単純な事象地平面は、外部領域から見れば $r_* = -\infty$ に移る。亀座標は地平面を除去したのではなく、波の境界条件を課すべき漸近端へ移したのである。

原理

亀座標は、地平面の因果構造を一次元散乱の漸近構造へ翻訳する。地平面が $r_* = -\infty$ に置かれることによって、「地平面へ入る波」は平面波の向きとして定義できる。

1.4 地平面を横切る座標

亀座標は地平面を無限遠へ送るが、地平面そのものを横切るには先進時刻 $v = t + r_*$ を座標として用いる。 $dt = dv - f^{-1}dr$ を式 (1.2) へ代入すると、

$$ds^2 = -f(r) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\Omega^2 \quad (1.11)$$

となる。これは $f(r_h) = 0$ でも退化せず、未来地平面を横切る内向き Eddington–Finkelstein 座標である。静的座標における g_{rr} の発散が座標の見かけであったことも、この式から分かる。

時間因子を $e^{-i\omega t}$ とすると、地平面へ入る波は

$$e^{-i\omega t} e^{-i\omega r_*} = e^{-i\omega v} \quad (1.12)$$

であり、正則な座標 v だけの関数である。これに対して外向き波は $u = t - r_*$ の関数で、未来地平面上の静的外部から出てくる。したがって「事象地平面で内向き」という条件は、符号の暗記ではなく、未来地平面上で正則かつ因果的な解を選ぶ条件である。第9章では、同じ正則性を複素座標へ延長して熱因子を得る。

1.5 Schwarzschild 時空

質量 $M > 0$ の Schwarzschild ブラックホールでは、

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (1.13)$$

であり、事象地平面は $r_h = 2M$ にある。式 (1.6) を積分すると、

$$r_* = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (1.14)$$

を得る。加法定数は、対数の中を無次元化する規約に含めた。外部領域 $2M < r < \infty$ は、

$$-\infty < r_* < \infty \quad (1.15)$$

へ写る。

地平面近傍と無限遠での漸近形は、それぞれ

$$r_* = 2M \log \left(\frac{r - 2M}{2M} \right) + O(1), \quad r \rightarrow 2M + 0, \quad (1.16)$$

$$r_* = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} \right) + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

である。無限遠でも r_* と r は対数項だけずれる。この長距離の位相は、精密な散乱振幅や漸近展開では無視できない。

r 座標では地平面が有限位置にあるが、 r_* 座標では外部領域全体が実直線になる。事象地平面と空間的無限遠は、それぞれ左端と右端の漸近領域である。

1.6 スカラー波動方程式の一次元化

背景計量上の質量ゼロスカラー場を Φ とし、外部源を J とする。場の方程式を

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = J \quad (1.18)$$

とする。ギリシャ添字は四次元時空座標を走る。球面調和関数 $Y_{\ell m}$ を用いて、

$$\Phi(t, r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{\Psi_{\ell m}(t, r)}{r} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \quad (1.19)$$

と展開する。整数 ℓ と m は角運動量量子数であり、

$$\Delta_{S^2} Y_{\ell m} = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell m} \quad (1.20)$$

を満たす。 Δ_{S^2} は単位球面上の Laplace 演算子である。 $1/r$ をあらかじめ取り出した理由は、動径方程式から一階微分項を消すためである。

同様に源を球面調和展開して式 (1.18) へ代入すると、各 (ℓ, m) に対して

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + V_\ell(r) \right] \Psi_{\ell m}(t, r) = S_{\ell m}(t, r) \quad (1.21)$$

を得る。 $S_{\ell m}$ は J から定まる一次元の源であり、有効ポテンシャルは

$$V_\ell(r) = f(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} \right] \quad (1.22)$$

である。

一階微分項が消える理由.

動径部分に現れる組合せは

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f(r) \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \quad (1.23)$$

である。 $\partial_r = f^{-1} \partial_{r_*}$ を用いて展開すると、 Ψ/r の微分から生じる項と体積要素 r^2 の微分から生じる項が組み合わさる。その結果、 $\partial_{r_*} \Psi$ に比例する項が消え、式 (1.21) の Schrödinger 型が得られる。場の再定義 $\Phi = \Psi/r$ は単なる慣習ではなく、動径演算子を対称な形へ移す変換である。

Schwarzschild 時空では、式 (1.13) を用いて

$$V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (1.24)$$

となる。このポテンシャルは地平面と無限遠の両方で零に近づき、その中間に障壁をもつ。したがって、外部摂動は一次元の障壁散乱として理解できる。

1.7 時間規約と放射条件

周波数領域へ移るため、時間依存性を

$$\Psi_{\ell m}(t, r) = e^{-i\omega t} \psi_{\ell m}(r; \omega) \quad (1.25)$$

と定める。 $\omega \in \mathbb{C}$ は複素周波数である。ポテンシャルが消える漸近領域では、動径関数は

$$\psi(r_*; \omega) \sim e^{\pm i\omega r_*} \quad (1.26)$$

となる。式 (1.25) と組み合わせると、

$$e^{-i\omega t} e^{-i\omega r_*} = e^{-i\omega v}, \quad (1.27)$$

$$e^{-i\omega t} e^{+i\omega r_*} = e^{-i\omega u}. \quad (1.28)$$

先進時刻 v の関数は内向き、遅延時刻 u の関数は外向きである。したがって、事象地平面で純粋に内向き、無限遠で純粋に外向きという放射条件は

$$\psi(r_*; \omega) \sim e^{-i\omega r_*}, \quad r_* \longrightarrow -\infty, \quad (1.29)$$

$$\psi(r_*; \omega) \sim e^{+i\omega r_*}, \quad r_* \longrightarrow +\infty \quad (1.30)$$

となる。

注意

「 $e^{+i\omega r_*}$ が出射波」という判定は、それだけでは意味をもたない。時間因子 $e^{-i\omega t}$ と座標の向きを同時に指定して初めて、入射と出射が決まる。時間規約を $e^{+i\omega t}$ に変えれば、すべての符号が反転する。

$\text{Im } \omega < 0$ の準固有振動 (quasinormal mode; QNM) 周波数^{*1}を想定すると、式 (1.29) と (1.30) の空間波形は実軸上で発散する。この事実は異常ではない。時間的に減衰しながら、波面が無限遠へ進む開放系の共鳴状態を、全空間で同じ複素周波数により表した結果である。ただし、この発散のため QNM 波形は通常の自乗可積分な L^2 固有関数にはならない。これが解析接続と、第 6 章で定義する複素スケーリングを必要とする第一の理由である。

1.8 二つの地平面をもつ場合

Schwarzschild-de Sitter 時空では、静的領域がブラックホール地平面 r_b と宇宙論的地平面 r_c の間にある。ここで

$$r_b < r < r_c \quad (1.31)$$

である。適切な加法定数を選ぶと、

$$r_* \longrightarrow -\infty, \quad r \longrightarrow r_b + 0, \quad (1.32)$$

$$r_* \longrightarrow +\infty, \quad r \longrightarrow r_c - 0 \quad (1.33)$$

となる。QNM の放射条件は、ブラックホール地平面へ入る波と、宇宙論的地平面へ出ていく波である。式の形は (1.29)、(1.30) と同じでも、右端の物理的意味は空間的無限遠ではなく宇宙論的地平面になる。

一方、極限ブラックホールでは $f(r)$ の零点が重なるため、式 (1.10) の対数則が変わ

^{*1} 準固有振動の定義と三つの同値な特徴づけは第 4 章で与える。

る。重根 $r = r_e$ の近傍で

$$f(r) = a(r - r_e)^2 + O((r - r_e)^3) \quad (1.34)$$

ならば、 a を二次項の係数として

$$r_* = -\frac{1}{a(r - r_e)} + O(\log |r - r_e|) \quad (1.35)$$

となる。非極限系の公式でパラメータを極限值へ代入するだけでは、漸近構造を取り違えることがある。

1.9 本章の結論

本章で得た方程式は

$$(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V) \Psi = S \quad (1.36)$$

である。ブラックホールの種類と摂動のスピンは有効ポテンシャル V に入り、因果構造は r_* の範囲と漸近条件に入る。この分離によって、幾何学の問題は散乱理論の問題へ移された。次章では、式 (1.36) を外力に対する応答として解く。

研究問題：極限地平面の散乱座標

Reissner–Nordström 時空の $f(r) = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ について、非極限と極限の亀座標を別々に構成せよ。 $|Q| \rightarrow M$ と $r \rightarrow r_+$ の順序を交換し、近地平面の波動方程式と Jost 規格化がどこで非一様になるかを決定せよ。既知の式を再現するだけでなく、後の数値計算で用いる一様座標または matched asymptotic expansion を提案し、その誤差を評価せよ。

第 2 章

マスター場

三十輻，共一轂，當其無，有車之用。

— 『老子道德經』第十一章

2.1 幾何学から一つの場合へ

亀座標は外部領域を散乱の実直線へ移した。しかし、計量摂動 $h_{\mu\nu}$ の十成分をそのまま散乱させることはできない。座標変換で消える成分、拘束方程式で決まる成分、伝播する成分を分ける必要がある。その結果を一つまたは少数の変数へ集約したものをマスター場とよぶ。

まず質量ゼロスカラー場で仕組みを見る。作用を

$$I[\Phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \int d^4x \sqrt{-g} J \Phi \quad (2.1)$$

とする。 J は外部源である。球面調和関数で展開し、 $\Phi = r^{-1} \Psi_{\ell m} Y_{\ell m}$ と置けば、角度を積分した作用は境界項を除いて

$$I_{\ell m} = \frac{1}{2} \int dt dr_* [(\partial_t \Psi_{\ell m})^2 - (\partial_{r_*} \Psi_{\ell m})^2 - V_\ell \Psi_{\ell m}^2 + 2S_{\ell m} \Psi_{\ell m}] \quad (2.2)$$

となる。変分すれば

$$(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V_\ell) \Psi_{\ell m} = S_{\ell m} \quad (2.3)$$

を得る。一次元方程式だけでなく作用まで残しておく理由は、後に同じ場を量子化するためである。

2.2 重力摂動の最小限

背景計量を $g_{\mu\nu}$ とし、摂動を

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

とする。無限小座標変換 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ により、

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu \quad (2.5)$$

と変わる。したがって、個々の $h_{\mu\nu}$ を応答として読むことはできない。Schwarzschild 背景では球面上の parity により軸性と極性へ分け、拘束を解くと、各 $\ell \geq 2$ に一つずつ gauge-invariant なマスター場が残る [1–3]。

球面上の反転 $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\pi - \vartheta, \varphi + \pi)$ に対し、極性 (even-parity) 成分は $(-1)^\ell$ 、軸性 (odd-parity) 成分は $(-1)^{\ell+1}$ で変換する。放射自由度が二つの部門に一つずつ現れるのは $\ell \geq 2$ である。 $\ell = 0$ の極性摂動は質量の微小変化と gauge、 $\ell = 1$ の軸性摂動は角運動量の微小変化、すなわち線形化した Kerr 方向と gauge を表す。 $\ell = 1$ の極性真空摂動は重心の移動に対応する gauge である。物質源があれば単極・双極の拘束場は残るが、無限遠へ伝播する重力放射ではない [4]。したがって以下の RW–Zerilli 波動方程式で $\ell \geq 2$ とする理由は、ポテンシャルの都合ではなく、放射自由度の存在である。

軸性の Regge–Wheeler 場を Ψ_{RW} とすれば、

$$(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V_{\text{RW}}) \Psi_{\text{RW}} = S_{\text{RW}}, \quad (2.6)$$

ここで、

$$V_{\text{RW}}(r) = f(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right], \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (2.7)$$

である。極性の Zerilli 場も同じ形の方程式を満たす。ここで

$$\lambda = \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2} \quad (2.8)$$

と置けば、そのポテンシャルは

$$V_Z(r) = \frac{2f(r)}{r^3(\lambda r + 3M)^2} \left[\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 3\lambda^2 M r^2 + 9\lambda M^2 r + 9M^3 \right] \quad (2.9)$$

となる [5]。二つのポテンシャルは異なるが、適切な一次微分変換で互いに移り、第4章で定義する同じ準固有振動周波数をもつ [6]。

原理

マスター場と有効ポテンシャルは表示であり、唯一ではない。放射条件、実周波数の散乱行列、および物理的な源から観測量へ至る写像が表示を越えて比較される。

2.3 源と観測量

真空方程式だけでは応答理論にならない。物質の stress tensor を $T_{\mu\nu}$ とすれば、線形化 Einstein 方程式の球面調和成分が S_{RW} または S_Z を定める。同じ物質源でも、マスター場の定義を変えれば S の形は変わる。したがって、マスター場の解だけを観測量と同一視してはならない。

遠方の放射波形、地平面を横切る流束、局所的な曲率摂動など、観測操作を O と書く。源から観測量までの関係は模式的に

$$T_{\mu\nu} \longrightarrow S_{\ell m} \longrightarrow \Psi_{\ell m} \longrightarrow \delta O \quad (2.10)$$

である。第一の矢印は線形化 Einstein 方程式の拘束と射影、最後の矢印は波形または流束の再構成を表す。次章では中央の矢印を外力に対する解演算子として定義する。

一つの完全な鎖.

Martel–Poisson の規格化では、極性場 $\Psi_{\ell m}^{\text{even}}$ と軸性場 $\Psi_{\ell m}^{\text{odd}}$ から、未来 null infinity における重力波を

$$h_+ - ih_\times = \frac{1}{2r} \sum_{\ell m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} (\Psi_{\ell m}^{\text{even}} + i\Psi_{\ell m}^{\text{odd}}) {}_{-2}Y_{\ell m} + O(r^{-2}) \quad (2.11)$$

と再構成できる。 $u = t - r_*$ とすれば、放射エネルギーは

$$\frac{dE}{du} = \frac{1}{64\pi} \sum_{\ell m} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \left(|\partial_u \Psi_{\ell m}^{\text{even}}|^2 + |\partial_u \Psi_{\ell m}^{\text{odd}}|^2 \right) \quad (2.12)$$

である [4]。別の RW 場を用いると奇パリティ場に時間微分または積分が入り、係数も変わる。したがって、源 $T_{\mu\nu}$ の射影、Green 関数による $\Psi_{\ell m}$ の計算、式 (2.11) による波形再構成を、同じ規格化を通して初めて観測量になる。

2.4 回転時空について何を残すか

Kerr 時空では球対称性がないため、Regge–Wheeler 型の実ポテンシャル一つには還元されない。質量を M 、角運動量を $J = aM$ とし、

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad \Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (2.13)$$

とする。 r_+ は事象地平面、 Ω_H はその角速度である。Kerr の亀座標は

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad (2.14)$$

で定義する。

Petrov 型 D の曲率成分を用いると、スピン s の Teukolsky 変数を模式的に

$$\psi_s = e^{-i\omega t + im\varphi} S_{s\ell m}(\vartheta; a\omega) R_{s\ell m}(r) \quad (2.15)$$

と分離できる [7]。 $S_{s\ell m}$ はスピン重み付き回転楕円面調和関数であり、角固有値が $a\omega$ に依存するため、角方程式と動径方程式を同時に解く。スピンに依存する冪の前置因子を省けば、放射条件は

$$R_{s\ell m} \sim e^{-i(\omega - m\Omega_H)r_*}, \quad r \longrightarrow r_+, \quad (2.16)$$

$$R_{s\ell m} \sim e^{+i\omega r_*}, \quad r \longrightarrow \infty \quad (2.17)$$

である。地平面を横切る Killing energy flux は $\omega - m\Omega_H$ に比例する。したがって boson の $0 < \omega < m\Omega_H$ では地平面 flux が負になり、反射波が入射波より強くなる superradiance が起こる。この周波数のずれは第 9 章の熱因子にも同じ形で現れる。

本文に残す Kerr の最小限は、地平面生成子、Teukolsky 分離、二端の放射条件、superradiance までである。計量再構成と数値法の全分類は行わず、第四章の研究問題で実装と検証へ送る。

2.5 本章の結論

ブラックホール摂動は、gauge と拘束を除いたマスター場の開放波動問題へ還元される。作用 (2.2) は古典応答と量子化の共通の出発点であり、式 (2.10) は表示依存の量と観測量を分ける。次章では、マスター方程式を外力に対して反転する。

第 3 章

レゾルベント

“Deep calleth unto deep.”

— Psalm 42:7, King James Version

3.1 先に応答を問う

前章で得た一次元方程式を、 $x = r_*$ と略記して

$$(\partial_t^2 + H) \Psi(t, x) = S(t, x) \quad (3.1)$$

と書く。ここで、空間演算子 H は

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (3.2)$$

であり、 $V(x)$ は実数値の有効ポテンシャル、 $S(t, x)$ は外部源である。

閉じた系ならば、 H の固有関数を求めて展開する方法が自然である。しかしブラックホール外部では、左右の漸近端からエネルギーが流出する。そこで問いを次のように変える。

原理

どの複素周波数が許されるかを先に問うのではなく、与えられた源がどの応答を生むかを問う。その応答の解析構造として、極と連続スペクトルを見いだす。

この順序では、第 4 章で定義する準固有振動 (QNM) は入力ではなく応答から読み取る結果である。

3.2 二つのレゾルベント

まず、複素エネルギー変数を $z \in \mathbb{C}$ とし、 H のレゾルベントを

$$\mathcal{R}(z) = (H - z)^{-1} \quad (3.3)$$

と定義する。この逆演算子が有界に存在する z の集合をレゾルベント集合 $\rho(H)$ とよび、その補集合をスペクトル $\sigma(H)$ とよぶ。

波動方程式では $z = \omega^2$ であるため、周波数平面上的演算子束

$$\mathcal{L}(\omega) = H - \omega^2 \quad (3.4)$$

と周波数 Green 演算子

$$\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{L}(\omega)^{-1} = \mathcal{R}(\omega^2) \quad (3.5)$$

を用いる。 z 平面では自己共役作用素のスペクトル論が明瞭であり、 ω 平面では入射・出射波と時間発展が明瞭である。本書では両者を区別し、必要に応じて移る。

注意

$z = \omega^2$ は一対一ではない。 z 平面の平方根には二つの Riemann sheet があり、放射条件の解析接続は sheet の選択を含む。「実軸を越えて解析接続する」という記述だけでは不十分であり、 ω の符号と境界値を指定しなければならない。

3.3 因果的 Fourier–Laplace 変換

源が有限時刻以後に作用するとする。 $\gamma > 0$ を十分大きく取り、

$$\Psi(t, x) = \int_{\mathbb{R} + i\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \psi(\omega, x), \quad (3.6)$$

$$S(t, x) = \int_{\mathbb{R} + i\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} s(\omega, x) \quad (3.7)$$

と書く。積分路 $\mathbb{R} + i\gamma$ は上半平面の水平線である。式 (3.1) は

$$\mathcal{L}(\omega)\psi(\omega) = s(\omega) \quad (3.8)$$

となるため、

$$\psi(\omega) = \mathcal{G}(\omega)s(\omega) \quad (3.9)$$

である。上半平面から定義して下方へ解析接続することにより、遅延 Green 関数の境界値が選ばれる。

観測操作を線形汎関数 $\langle O|$ 、源の空間分布を $|S\rangle$ と書けば、観測される周波数応答は

$$\mathcal{A}(\omega) = \langle O|\mathcal{G}(\omega)|S\rangle \quad (3.10)$$

である。 $A(\omega)$ はスカラーであり、源と観測点を変えれば同じ極に対する強度も変わる。スペクトルの存在と、そのスペクトルが強く励起されることは別問題である。

重力摂動では、物理的な物質源 $T_{\mu\nu}$ からマスター方程式の源を作る線形写像を $\mathcal{D}_S$ 、マスター場から検出器の観測量を作る線形写像を $\mathcal{D}_O$ と書ける。このとき物理的な源から観測応答までの写像は

$$\delta O(\omega) = \mathcal{D}_O \mathcal{G}(\omega) \mathcal{D}_S T \quad (3.11)$$

である。 $\mathcal{D}_S$ と $\mathcal{D}_O$ は背景、ゲージ不変量の選択、観測方法に依存するが、それらを整合して変換した最終的な δO は表示の選び方に依存しない。この点は第 12 章で整理する。

3.4 Jost 解

有効ポテンシャルが $x \rightarrow \pm\infty$ で十分速く零へ近づく場合を考える。左 Jost 解 $f_-(x, \omega)$ と右 Jost 解 $f_+(x, \omega)$ を、それぞれ

$$\mathcal{L}(\omega)f_-(x, \omega) = 0, \quad f_-(x, \omega) \sim e^{-i\omega x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L}(\omega)f_+(x, \omega) = 0, \quad f_+(x, \omega) \sim e^{+i\omega x}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.13)$$

によって定める。左端がブラックホール地平面ならば f_- は地平面へ入る解、右端が空間的無限遠ならば f_+ は無限遠へ出ていく解である。

二つの解の Wronskian を

$$\mathcal{W}(\omega) = f_-(x, \omega) \frac{\partial f_+(x, \omega)}{\partial x} - \frac{\partial f_-(x, \omega)}{\partial x} f_+(x, \omega) \quad (3.14)$$

と定義する。微分方程式に一階微分項がないので、 $\mathcal{W}(\omega)$ は x に依存しない。実際、式 (3.14) を x で微分し、両方の Jost 解が同じ方程式を満たすことを用いれば零になる。

3.5 Green 核の構成

周波数 Green 核 $G(x, x'; \omega)$ を

$$\mathcal{L}(\omega)G(x, x'; \omega) = \delta(x - x') \quad (3.15)$$

によって定める。 $x_< = \min(x, x')$ 、 $x_> = \max(x, x')$ とすると、放射条件を満たす Green 核は

$$G(x, x'; \omega) = -\frac{f_-(x_<, \omega)f_+(x_>, \omega)}{\mathcal{W}(\omega)} \quad (3.16)$$

である。

Green 核の接続条件.

$x \neq x'$ では同次方程式を満たすため、左側では f_- 、右側では f_+ に比例する。 $x = x'$ での連続性から両側の係数を一つにまとめられる。さらに式 (3.15) を x' の近傍で積分すると、

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x'+0} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x'-0} = -1 \quad (3.17)$$

を得る。この微分の跳びが式 (3.16) の符号と係数を固定する。

式 (3.16) は本書で最も重要な公式の一つである。分子は源から観測点への伝播を、分母は左右の放射条件が両立するかどうかを表す。 $\mathcal{W}(\omega)$ が零ならば、左右の Jost 解は一次従属になり、外部源がなくても両端で放射条件を満たす解が存在する。このような複素周波数を次章で準固有振動 (QNM) と定義する。

3.6 散乱係数と流束

実周波数 $\omega > 0$ を考える。右側から入射する散乱解 ψ_{in} を

$$\psi_{\text{in}} \sim e^{-i\omega x} + \mathcal{S}_R(\omega)e^{+i\omega x}, \quad x \longrightarrow +\infty, \quad (3.18)$$

$$\psi_{\text{in}} \sim \mathcal{S}_T(\omega)e^{-i\omega x}, \quad x \longrightarrow -\infty \quad (3.19)$$

と規格化する。 $\mathcal{S}_R$ と $\mathcal{S}_T$ は、それぞれ反射振幅と透過振幅である。

解 ψ に付随する流束を

$$j[\psi] = \frac{1}{2i} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right) \quad (3.20)$$

と定義する。ポテンシャルが実数ならば j は x に依存しない。左右の漸近波数が同じ場合、流束保存から

$$|\mathcal{S}_R(\omega)|^2 + |\mathcal{S}_T(\omega)|^2 = 1 \quad (3.21)$$

を得る。ブラックホールへ吸収される割合、すなわち greybody factor は

$$\Gamma(\omega) = |\mathcal{S}_T(\omega)|^2 \quad (3.22)$$

である。異なる漸近波数や結合チャンネルをもつ場合には、群速度と流束規格化を含めなければならない。

3.7 解析接続された応答

自己共役な H の物理的スペクトルは実軸上にある。共鳴は、そのスペクトルへ新しい L^2 固有値として追加されるのではない。上半平面で定義した Green 演算子の行列要素を、放射条件を保ったまま下半平面へ解析接続したとき、その極として現れる。

単純極 $\omega = \omega_n$ の近傍では、

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{A_n}{\omega - \omega_n} + \mathcal{G}_{\text{reg}}(\omega) \quad (3.23)$$

と書ける。 A_n は演算子値留数、 $\mathcal{G}_{\text{reg}}$ は ω_n で正則な部分である。源と観測操作を挟むと、

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{\langle O|A_n|S \rangle}{\omega - \omega_n} + \mathcal{A}_{\text{reg}}(\omega) \quad (3.24)$$

となる。物理的に測られる極の強さは $\langle O|A_n|S \rangle$ であって、任意に規格化した QNM 波形そのものではない。

3.8 積分路を変形する

時間領域の応答は式 (3.6) の積分路を下方へ変形することで解析できる。模式的には

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{pole}}(t) + \Psi_{\text{cont}}(t) + \Psi_{\text{arc}}(t) \quad (3.25)$$

と分かれる。第一項は変形中に横切った極の留数、第二項は分岐切断または連続スペクトルの不連続性、第三項は大円弧や高周波部分からの寄与を表す。

単純極の寄与は

$$\Psi_{\text{pole}}(t) \propto e^{-i\omega_n t} \langle O|A_n|S \rangle \quad (3.26)$$

である。 $\text{Im } \omega_n < 0$ ならば時間とともに減衰する。しかし、どの時刻範囲で式 (3.26) が支配的かは、極の位置だけでは決まらない。源の帯域、観測点、連続成分、高周波成分との大小比較が必要である。

注意

積分路変形から得た「極の和」は、条件なしに全時刻の完全展開になるわけではない。大円弧が消える領域、分岐切断の位置、初期データの正則性、観測点の位置を確認する必要がある。QNM の完全性を、有限次元行列の固有ベクトル展開から類推してはならない。

漸近平坦な Schwarzschild 時空では、長距離ポテンシャルに由来する非解析性が、第5章で定義する遅時間の冪減衰成分と関係する。一方、二つの地平面に挟まれた de Sitter ブラックホールでは漸近構造が異なる。時間応答は第五章、連続応答のスペクトル表示は第二部で扱う。

3.9 本章の結論

本章で構成した基本対象は、許容周波数の集合ではなく Green 演算子 $\mathcal{G}(\omega)$ である。Jost 解による公式 (3.16) から、散乱振幅と外力応答の特異性が同じ Wronskian によって支配されることが分かった。次章では、その極を準固有振動 (QNM) として定義し、詳しく調べる。

研究問題：長距離 Jost 関数

Schwarzschild の有効ポテンシャルは無限遠で有限範囲ポテンシャルではない。Volterra 方程式による通常の Jost 解の構成を、 r_* と r の対数差を保ったまま作り直せ。低周波で生じる branch point の位置と sheet を同定し、Wronskian の零点と分岐切断の不連続性を同じ数値計算から抽出する方法を設計せよ。収束判定は、切断の置き方を変えても時間応答が不変であることとする。

第 4 章

準固有振動

“*Rest, rest, perturbèd spirit.*”

— William Shakespeare, *Hamlet*, Act I, Scene 5

4.1 三つの同じ定義

前章の Green 核は

$$G(x, x'; \omega) = -\frac{f_-(x_<, \omega)f_+(x_>, \omega)}{\mathcal{W}(\omega)} \quad (4.1)$$

であった。 $\mathcal{W}(\omega)$ が零になると、左で流出条件を満たす解と右で流出条件を満たす解が同じ解になる。

定義 4.1 (準固有振動). 複素周波数 ω_n が

$$\mathcal{W}(\omega_n) = 0 \quad (4.2)$$

を満たすとき、 ω_n を QNM 周波数とよぶ。対応する非自明な同次解 $\psi_n(x)$ は、両方の漸近端で系の外へ向かう放射条件を満たす。

時間因子を $e^{-i\omega t}$ とすれば、ブラックホール外部の条件は

$$\psi_n(x) \sim e^{-i\omega_n x}, \quad x \longrightarrow -\infty, \quad (4.3)$$

$$\psi_n(x) \sim e^{+i\omega_n x}, \quad x \longrightarrow +\infty \quad (4.4)$$

である。左端の流出は事象地平面へ入ることを意味する。したがって、QNM は放射境界値問題の解、Jost Wronskian の零点、解析接続された Green 関数の極という三つの同値な定義をもつ。

4.2 単純極と留数

$W'(\omega_n) \neq 0$ ならば、 ω_n は単純極であり、

$$\operatorname{Res}_{\omega=\omega_n} G(x, x'; \omega) = -\frac{f_-(x_<, \omega_n) f_+(x_>, \omega_n)}{W'(\omega_n)} \quad (4.5)$$

である。Jost 解を定数倍すると分子と分母が同じ倍率で変わるため、この留数は規格化に依存しない。

一方、QNM 波形 ψ_n 自身は定数倍できる。観測操作を $\langle O|$ 、源を $|S\rangle$ とし、演算子値留数を A_n と書けば、観測される極部分は

$$A_n(\omega) = \frac{a_n}{\omega - \omega_n}, \quad a_n = \langle O|A_n|S\rangle \quad (4.6)$$

である。背景が定める周波数、規格化に依存する波形、演算子値留数、源と観測者を指定した振幅は同じ量ではない [8]。

原理

周波数だけでは時間波形は決まらない。物理的なモード強度は、Green 関数の留数に源と観測操作を挟んだ行列要素である。

4.3 空間的発散と時間的減衰

安定なブラックホールの減衰 QNM では $\operatorname{Im} \omega_n < 0$ である。固定した位置で

$$|e^{-i\omega_n t}| = e^{(\operatorname{Im} \omega_n)t} \quad (4.7)$$

は減衰する。しかし右端の空間因子は

$$|e^{+i\omega_n x}| = e^{-(\operatorname{Im} \omega_n)x} \quad (4.8)$$

であり、 $x \rightarrow +\infty$ で増大する。左端でも同様である。これは、外向きへ進む波面を一つの複素周波数で全空間に延長した結果であって、時間的不安定性ではない。

注意

QNM は通常の L^2 固有関数ではない。実軸上での発散を無視して Hilbert 空間の完全系とみなすと、規格化と展開範囲を誤る。第 6 章で定義する複素スケー

リングは、この発散を解析接続された座標上で減衰へ変える。

4.4 減衰の向きを決めるエネルギー

実ポテンシャル $V(x) \geq 0$ と有限エネルギーの実解について、区間 $[-R, R]$ のエネルギーを

$$E_R(t) = \frac{1}{2} \int_{-R}^R dx [(\partial_t \Psi)^2 + (\partial_x \Psi)^2 + V \Psi^2] \quad (4.9)$$

とする。波動方程式を用いて部分積分すると、

$$\frac{dE_R}{dt} = [\partial_t \Psi \partial_x \Psi]_{-R}^R \quad (4.10)$$

を得る。右端で右向き、左端で左向きの波だけを許せば、 $R \rightarrow \infty$ で右辺は二端へ出ていく負の flux となり、外部エネルギーは増えない。

もし $\text{Im} \omega > 0$ の流出モードがあれば、その空間波形は両端で減衰して有限エネルギーをもち、時間因子は指数的に増大する。これは式 (4.10) と両立しない。したがって、この正值エネルギーをもつ問題では不安定 QNM はない。この議論は減衰率の値を与えず、 V が正でない場合、回転により地平面 flux が負になりうる場合、重力の拘束を含む場合には、そのままは使えない。安定性とは周波数表の経験則ではなく、適切なエネルギーと境界 flux の符号を示す問題である。

4.5 一つの可解な障壁

QNM の生成を一つの式で見るため、Pöschl–Teller 障壁

$$V(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \quad V_0 > 0, \quad \alpha > 0 \quad (4.11)$$

を考える。 $y = (1 + \tanh \alpha x)/2$ と変数変換すると超幾何方程式になり、両端の放射条件から

$$\omega_n = \pm \sqrt{V_0 - \frac{\alpha^2}{4}} - i\alpha \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

を得る。障壁の高さが実部を、幅が減衰率の間隔を支配する。これはブラックホールの厳密なポテンシャルではないが、開放境界条件だけで複素周波数が生じることを示す。

4.6 光子球極限

Schwarzschild 時空で $\ell \gg 1$ とすると、有効ポテンシャルの主要部は $f(r)\ell(\ell + 1)/r^2$ であり、その極大は $r = 3M$ の不安定光子軌道にある。光子軌道の角振動数と Lyapunov 指数はともに

$$\Omega_c = \Lambda_c = \frac{1}{3\sqrt{3}M} \quad (4.13)$$

である。固定した overtone 番号 n に対して

$$\omega_{\ell n} \simeq \Omega_c \left(\ell + \frac{1}{2} \right) - i\Lambda_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.14)$$

となる。局所的な光線力学が低い減衰率を説明する一方、有限 ℓ の極、留数、branch cut はこの近似からは得られない。例えば重力摂動の $\ell = 2$ 基本モードは

$$M\omega_{20} \simeq 0.37367 - 0.08896i \quad (4.15)$$

である [9]。

4.7 数値計算の判定基準

直接積分は左右の Jost 解の Wronskian を零にする。continued fraction 法は漸近級数の最小解条件を課す。時間発展は波形から極を推定する。第 6 章で導入する複素スケーリング法は流出波を減衰境界条件へ変える。手法は異なっても、判定基準は共通である。

- (i) 時間規約と両端の放射条件が一致する。
- (ii) 基底数、領域、精度を変えて極が安定する。
- (iii) 離散化された連続成分が極から分離される。
- (iv) 物理的振幅が必要なら、留数も収束する。

Schwarzschild と Reissner–Nordström に対する複素スケーリング計算は文献 [10] で与えられている。非自己共役問題では固有値の感度と実周波数応答の感度を区別する必要がある [11]。

4.8 本章の結論

QNM はブラックホールに固有の物質振動ではなく、開放境界条件をもつ Green 関数の共鳴極である。その極は重要だが、応答を決めるには留数、源、観測操作、連続成分が要る。次章では、極と連続成分を逆変換し、時間波形のどの部分を支配するかを調べる。

研究問題：Kerr の QNM 数値実装

Teukolsky の角方程式と動径方程式を同時に解き、 $s = -2$ 、 $\ell = m = 2$ の基本 QNM を $a/M = 0$ から近極限領域まで追跡せよ [7, 12]。最低限、次を満たす実装を作る。

- (i) 角固有値と ω を同じ反復または contour 法で決定する。
- (ii) 級数次数、数値領域、精度を変え、安定な極と離散化された連続成分を分ける。
- (iii) $a \rightarrow 0$ で Schwarzschild 値へ戻ることを確認する。
- (iv) 可能ならば Green 関数の留数を求め、規格化を変えたときの不変量を示す。

周波数表の再現は入口にすぎない。近極限での branch structure、zero-damped mode、源依存の励起振幅のいずれかを、実装から得られる研究課題として定式化せよ。

第 5 章

時間応答

*“To every thing there is a season, and a time to every purpose
under the heaven.”*

— Ecclesiastes 3:1, King James Version

5.1 リングダウンとは何か

連星ブラックホールが合体すると、観測される重力波は振幅の増大する連星運動、強い非線形性をもつ合体、合体後の減衰波形を順に示す（図 5.1）。合体後の残骸を一つの定常ブラックホールと小さな摂動の和で近似できる時間領域を、ここではリングダウン（ringdown）とよぶ。これは「波形の最大振幅より後」の同義語ではない。最大振幅の直後には非線形な合体の影響が残り、十分遅い時刻には連続成分から生じる冪減衰が優勢になりうる。

準固有振動の孤立極が支配する範囲では、無次元の重力波ストレイン $h(t)$ を模式的に

$$h_{\text{RD}}(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n \in C} A_n e^{-i\omega_n(t-t_0)}, \quad (5.1)$$

$$\omega_n = \Omega_n - \frac{i}{\tau_n}, \quad \Omega_n > 0, \quad \tau_n > 0 \quad (5.2)$$

と書ける。 A_n は源と観測操作を含む複素振幅、 Ω_n は振動角周波数、 τ_n は減衰時間、 t_0 は位相と振幅を記述するために選んだ基準時刻である。式 (5.1) はリングダウンの定義ではなく、その一部で有効な極近似である。

したがって、リングダウンの開始時刻を t_{peak} に固定することも、波形を有限個の QNM だけで完全に表すことも一般には正しくない。以下では、この時間領域を因果的 Green 関数の逆変換として定め、極近似がいつ許されるかを調べる。

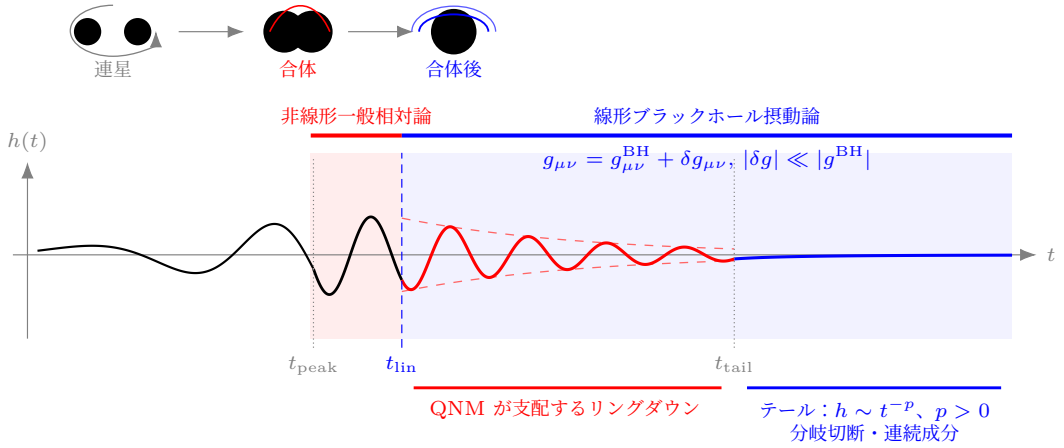


図 5.1 連星合体から遅時間までの模式的な波形。 t_{peak} は振幅の最大付近、 t_{lin} は指定した精度で線形摂動論が有効になる時刻、 t_{tail} は連続成分による幕減衰が無視できなくなる時刻を表す。後二者は普遍的な境界ではなく、源、観測量、要求精度によって変わる。

5.2 初期値問題を周波数へ移す

マスター場の方程式を

$$(\partial_t^2 + H) \Psi(t) = S(t) \quad (5.3)$$

とする。 $t = 0$ における初期値を Ψ_0 、 $\Pi_0 = \partial_t \Psi(0)$ とする。片側 Fourier–Laplace 変換

$$\hat{\Psi}(\omega) = \int_0^\infty dt e^{+i\omega t} \Psi(t), \quad \text{Im } \omega > 0 \quad (5.4)$$

を用いると、部分積分により

$$(H - \omega^2) \hat{\Psi}(\omega) = \hat{S}(\omega) + \Pi_0 - i\omega \Psi_0 \quad (5.5)$$

を得る。したがって初期値も有効な源として Green 演算子へ入る。

$$\hat{\Psi}(\omega) = \mathcal{G}(\omega) \left[\hat{S}(\omega) + \Pi_0 - i\omega \Psi_0 \right] \quad (5.6)$$

である。QNM の励起が初期データに依存することは、この一行ですでに分かる。

5.3 積分路が波形を分ける

$t > 0$ の場合は上半平面の積分路 C_+ から

$$\Psi(t) = \int_{C_+} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \widehat{\Psi}(\omega) \quad (5.7)$$

と戻す。積分路を下方へ変形すると、模式的に

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{arc}}(t) + \Psi_{\text{QNM}}(t) + \Psi_{\text{cut}}(t) \quad (5.8)$$

となる。大周波数の弧は波面直後の即時応答 (prompt response)、孤立極は QNM が支配するリングダウン、分岐切断の不連続性は遅時間テール (tail) を与える。三つは別々の解ではなく、一つの積分路を分けた表示である [13]。

単純極の和は

$$\Psi_{\text{QNM}}(t) = -i \sum_{n \in C} e^{-i\omega_n t} A_n \left[\widehat{S}(\omega_n) + \Pi_0 - i\omega_n \Psi_0 \right] \quad (5.9)$$

である。 C は変形中に横切った極の集合を表す。全体符号は積分路の向きによるが、極の指数と留数の組は変わらない。

5.4 QNM 展開の範囲

式 (5.9) は、いつでも成り立つ完全展開ではない。QNM の和だけを残すには、観測時刻と位置に対して大円弧が消え、分岐切断の寄与が無視でき、極の和が収束する必要がある。とくに波面の到着前に QNM を足しても、因果律を単独では再現できない。

一方、非常に遅い時刻には、下半平面で最も実軸に近い極よりも、原点付近の分岐点を作る冪減衰が優勢になりうる。したがってリングダウンは一般に中間時刻の漸近領域である。

注意

波形を有限個の減衰正弦波へあてはめられることと、Green 関数とその極だけで表されることは同じではない。あてはめの開始時刻、終了時刻、連続成分、ノイズ模型を変えて、極と振幅の安定性を別々に確認する。

5.5 分岐切断の不連続性

分岐切断の両側の境界値を $\mathcal{G}_+$ 、 $\mathcal{G}_-$ とし、その不連続性を

$$\text{Disc } \mathcal{G}(\omega) = \mathcal{G}_+(\omega) - \mathcal{G}_-(\omega) \quad (5.10)$$

と定義する。分岐切断を C_{cut} と書けば、連続成分は

$$\Psi_{\text{cut}}(t) = \int_{C_{\text{cut}}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \text{Disc } \mathcal{G}(\omega) |S_{\text{eff}}(\omega)\rangle \quad (5.11)$$

となる。 $|S_{\text{eff}}\rangle$ は式 (5.5) の右辺をまとめたものである。遅時間の冪則は、原点近傍における不連続性の小周波展開から決まる。

二つの地平面に挟まれた時空では、ポテンシャルが両端で指数的に減衰する。そのため、漸近平坦時空と同じ分岐切断の構造を仮定してはならない。どの非解析性が物理的で、どの点列が数値離散化かを、境界条件から決め直す。

5.6 源から観測者まで

検出器が読む信号を $A(t)$ とし、周波数領域で

$$\mathcal{A}(\omega) = \langle O | \mathcal{G}(\omega) | S \rangle \quad (5.12)$$

とする。極の位置は源と観測者によらないが、ある極が見えるかどうかは $\langle O | A_n | S \rangle$ による。対称性により零になる場合、近接する二極が相殺する場合、連続成分が極を覆う場合がある。リングダウンの「モード含有率」は背景だけの属性ではない。

原理

時間波形の分解は、周波数 Green 関数の積分路分解である。即時応答、リングダウン、遅時間テールの境界は絶対的ではないが、それらを生む解析構造は区別できる。

5.7 本章の結論

初期値と外力は同じ Green 演算子へ入り、極、分岐切断、高周波弧が一つの因果的な時間応答を作る。これで古典場の応答理論は閉じた。第二部では、実軸上で扱いにくい極と連続成分を複素座標上のスペクトルへ移す。

研究問題：極とテールの一様近似

Schwarzschild の固定した ℓ について、QNM 極の和と低周波の分岐切断積分を同じ初期データから数値評価せよ。リングダウンとテールの交差時刻を、最小減衰率だけでなく留数と初期データの台を含めて予測する一様近似を構成せよ。判定基準は、時間発展の直接計算に対して波面到着後の誤差を一つの規範で制御できることである。

第II部

共鳴のスペクトル

第 6 章

複素スケーリング

大音希聲，大象無形。

— 『老子道德經』第四十一章

6.1 流出波を減衰波へ変える

本章では、座標を複素方向へ変形して共鳴波を自乗可積分にする複素スケーリング法 (complex scaling method; CSM) を定義する。右端の QNM 波形を

$$\psi(x) \sim e^{+i\omega x}, \quad \omega = \omega_R - i\gamma, \quad \gamma > 0 \quad (6.1)$$

とする。実軸上では $|\psi| \sim e^{\gamma x}$ と増大する。そこで

$$x = ye^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (6.2)$$

と回転する。 $y > 0$ は実数である。波の絶対値は

$$\left| e^{+i\omega ye^{i\theta}} \right| = \exp[-y(\omega_R \sin \theta - \gamma \cos \theta)] \quad (6.3)$$

となる。したがって $\omega_R \sin \theta > \gamma \cos \theta$ ならば、実軸上で発散した共鳴波が複素経路上で減衰する。

ブラックホールでは左右の端を外向きに回す。相互作用領域 $|y| \leq R_0$ を実軸上に残す外部複素スケーリング (exterior complex scaling) は、例えば

$$x_\theta(y) = \begin{cases} y, & |y| \leq R_0, \\ \text{sgn}(y) [R_0 + (|y| - R_0)e^{i\theta}], & |y| > R_0 \end{cases} \quad (6.4)$$

である。

6.2 回転した演算子

一様回転では $d/dx = e^{-i\theta} d/dy$ である。したがって

$$H_\theta = -e^{-2i\theta} \frac{d^2}{dy^2} + V(ye^{i\theta}) \quad (6.5)$$

を得る。 H_θ は非自己共役である。自由演算子の連続スペクトルはエネルギー z 平面で

$$[0, \infty) \longrightarrow e^{-2i\theta} [0, \infty) \quad (6.6)$$

と回転する。回転線と実軸の間に露出した共鳴は、解析性が許す範囲で θ に依存しない離散固有値になる。

注意

複素スケーリングには、ポテンシャルを複素経路へ延長できる領域が必要である。地平面、無限遠、極限地平面で許される経路は同じとは限らない。 θ に対して固有値が静止することは診断であって、解析性の確認に代わる証明ではない。

Schwarzschild と Reissner–Nordström の QNM に対する構成は文献 [10] で与えられている。放射条件を行列固有値問題へ移せるため、極の探索と波形の正則化を同じ計算で行える。

6.3 離散極と離散化された連続成分

有限基底で H_θ を対角化すると、孤立した共鳴と回転線に沿う固有値点列が得られる。右・左固有ベクトルを $|\phi_\nu^R\rangle$ 、 $\langle\phi_\nu^L|$ とし、

$$\langle\phi_\mu^L| \phi_\nu^R\rangle = \delta_{\mu\nu} \quad (6.7)$$

と双直交規格化すれば、有限基底のレゾルベントは

$$\mathcal{R}_\theta(z) \simeq \sum_\nu \frac{|\phi_\nu^R\rangle\langle\phi_\nu^L|}{z_\nu - z} \quad (6.8)$$

となる。 θ とともに回転する点列は誤差ではなく、連続スペクトル積分の数値求積点として Green 関数の非極部分を担う。

原理

複素スケーリングで得た複素固有値をすべて QNM と呼んではならない。回転角と基底数に対して静止する孤立点が共鳴であり、回転線に沿う点列は連続応答の離散表示である。応答の再構成には両方が要る。

6.4 連続準位密度

相互作用をもつ演算子と比較演算子をそれぞれ H_θ 、 $H_{0,\theta}$ とする。実エネルギー E に対し、レゾルベント差から

$$\Delta\rho(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im Tr} [\mathcal{R}_\theta(E + i0) - \mathcal{R}_{0,\theta}(E + i0)] \quad (6.9)$$

を定義する。個々の trace が発散しても、差は適切な条件の下で有限になりうる。 $\Delta\rho$ は、孤立極だけでは見えない連続応答を実軸上へ戻す [14]。

Schwarzschild–de Sitter 時空では外部領域の両端が地平面であり、ポテンシャルは両端で指数的に減衰する。スカラー、電磁、重力摂動の QNM と連続成分を同じ複素スケーリング表示で扱える [15]。宇宙定数を変えたとき、極だけでなく $\Delta\rho$ がどう移るかを追うことで、時間応答の変化を極の一覧以上に記述できる。

6.5 数値計算で残す三つの検査

CSM の計算では、少なくとも次を保存する。

- (i) 回転角 θ を変えた固有値図。
- (ii) 基底数を変えた極、留数、連続準位密度の収束。
- (iii) 実周波数で直接計算した Green 関数との比較。

一枚の複素固有値図だけから物理的結論を出してはならない。第三の検査によって、複素座標上の表示が元の散乱応答を再現することを確認する。

6.6 本章の結論

複素スケーリングは、発散する QNM を減衰する固有関数へ変え、孤立極と連続成分を一つの非自己共役スペクトルへ置く。次章では、その離散極どうしが合体して個別モード表示が壊れる場合を扱う。

研究問題：de Sitter 連続応答の普遍性

Schwarzschild–de Sitter と Reissner–Nordström–de Sitter の複数スピンまたは結合チャンネルについて、同一の exterior complex scaling と trace subtraction を実装せよ。宇宙定数、電荷、次元を変えたとき、極と $\Delta\rho(E)$ のどの組合せが時間応答を一様に近似するかを調べよ。回転角に依存する点列の配置ではなく、実軸上の源付き応答の収束を最終判定とする。

第 7 章

例外点

“The way up and the way down are one and the same.”

— Heraclitus, fragment B60 (Diels-Kranz)

7.1 二つの共鳴が一つになる

背景または有効ポテンシャルが二つの実制御変数 λ_1, λ_2 に依存するとする。二つの共鳴固有値が一致し、右固有ベクトルも一つに合体する点を二次の例外点とよぶ。通常の縮退とは異なり、固有空間の次元が減る。

この二つの共鳴をまとめ、他のスペクトルから孤立させた部分空間を、本章ではクラスター (cluster) とよぶ。クラスター部分空間上の演算子は

$$H_{\text{cl}} = z_{\text{EP}}P + N, \quad N^2 = 0, \quad N \neq 0 \quad (7.1)$$

と書ける。 P は二次元クラスターへの射影、 N は冪零部分である。一つの複素化した制御変数 λ を用いれば、近傍の固有値は一般に

$$z_{\pm}(\lambda) = z_{\text{EP}} \pm c\sqrt{\lambda - \lambda_{\text{EP}}} + O(\lambda - \lambda_{\text{EP}}) \quad (7.2)$$

となる。 $c \neq 0$ は系に依存する。例外点を一周すると平方根の sheet が入れ替わり、二つの状態が交換する。

7.2 最小の二行列模型

平方根分岐と二重極を同時に見るため、

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

を考える。 $\lambda \neq 0$ では固有値と右固有ベクトルは

$$\omega_{\pm} = \pm\sqrt{\lambda}, \quad v_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_{\pm} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

である。 $\lambda \rightarrow 0$ で二つの固有値だけでなく二つの固有ベクトルも $(1, 0)^T$ へ合体する。

周波数レゾルベントを直接反転すると、

$$(\omega I - H(\lambda))^{-1} = \frac{1}{\omega^2 - \lambda} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ \lambda & \omega \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

であり、例外点 $\lambda = 0$ では

$$(\omega I - H(0))^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^{-1} & \omega^{-2} \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

となる。固有ベクトルの規格化を工夫しても ω^{-2} は消えない。以下の Riesz moment と Laurent 演算子は、この有限次元模型に見える二極の合体を、波動演算子の孤立した共鳴クラスターに対して定義する道具である。

7.3 個別留数の破綻

例外点の外で、二つの単純極からなる Green 演算子を

$$\mathcal{G}_{\text{cl}}(\omega) = \frac{A_+}{\omega - \omega_+} + \frac{A_-}{\omega - \omega_-} \quad (7.7)$$

とする。 A_+ と A_- は個別極の留数演算子である。例外点へ近づくと、左右固有ベクトルの自己直交性により $A_{\pm}$ はそれぞれ発散しうる。それでも固定した ω における和は有限でありうる。

この発散は、物理的応答が必ず発散することを意味しない。二つのほぼ平行な固有ベクトルを座標軸として選んだため、座標成分が悪条件化したのである。例外点で残る対象は、個々のモード標識ではなく二つをまとめた孤立クラスターである。

7.4 Riesz contour moment

二つの極だけを囲み、他の極と連続スペクトルを囲まない反時計回りの閉曲線を Γ とする。二つの contour moment を

$$M_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \omega^k \mathcal{G}(\omega) d\omega, \quad k = 0, 1 \quad (7.8)$$

と定義する。単純極が分離している領域では

$$M_0 = A_+ + A_-, \quad (7.9)$$

$$M_1 = \omega_+ A_+ + \omega_- A_- \quad (7.10)$$

である。対称な極データを

$$s_1 = \omega_+ + \omega_-, \quad s_2 = \omega_+ \omega_- \quad (7.11)$$

と置くと、式 (7.7) は

$$\mathcal{G}_{\text{cl}}(\omega) = \frac{M_1 + (\omega - s_1)M_0}{\omega^2 - s_1\omega + s_2} \quad (7.12)$$

となる。この表示は $+$ と $-$ の交換に不変であり、個別留数の発散を含まない。

7.5 Laurent 演算子

例外点で $\omega_+ = \omega_- = \omega_{\text{EP}}$ になると、クラスター Green 演算子は

$$\mathcal{G}_{\text{cl}}(\omega) = \frac{A_{-2}}{(\omega - \omega_{\text{EP}})^2} + \frac{A_{-1}}{\omega - \omega_{\text{EP}}} + \mathcal{G}_{\text{reg}}(\omega) \quad (7.13)$$

と展開される。式 (7.8) から直ちに

$$A_{-1} = M_0, \quad (7.14)$$

$$A_{-2} = M_1 - \omega_{\text{EP}} M_0 \quad (7.15)$$

を得る。 A_{-1} と A_{-2} は Jordan 鎖の規格化を飛ばずに定義できる。

観測操作と源を挟み、

$$a_{-j} = \langle O | A_{-j} | S \rangle, \quad j = 1, 2 \quad (7.16)$$

とする。二重極を逆 Fourier 変換すると、時間応答は

$$\mathcal{A}_{\text{cl}}(t) = (C_0 + C_1 t) e^{-i\omega_{\text{EP}} t} \quad (7.17)$$

となる。 C_0 、 C_1 は a_{-1} 、 a_{-2} と変換規約から定まる。 $te^{-i\omega_{\text{EP}} t}$ はあてはめの便宜ではなく、二重極の必然である。

ブラックホール散乱における Jost 関数の二重零点、Riesz–Laurent 表示、源付き応答の関係は文献 [16] で与えられている。

原理

例外点では個別モードの表示が特異になる。孤立クラスターの輪郭積分モーメント、Laurent 演算子、固定した源と観測者の応答は、モード標識と規格化に依存せず有限に定義できる。

7.6 幾何学的位相

例外点を囲む閉曲線に沿って制御変数を断熱的に動かすと、一周後に二状態が交換し、二周後に元の状態へ戻る。右固有ベクトルだけの符号を比較するのではなく、左・右固有ベクトルの双直交接続から幾何学的位相を定める必要がある。

共鳴状態は通常の内積で規格化できないが、複素スケーリングは減衰する状態を与え、パラメータ空間上の接続を構成できる。量子共鳴の例外点を周回する幾何学的位相と位相的不変量は文献 [17] で論じられている。

幾何学的位相は局所 Laurent 係数と同じ量ではない。前者は parameter loop の大域的情報、後者は周波数平面の局所特異性である。ただし、どちらも個別固有ベクトルの規格化ではなくクラスターの幾何を読む。

7.7 実周波数応答は滑らかでありうる

例外点の近傍でも、次の条件を仮定する。

- (i) 二極のクラスターが他のスペクトルから孤立している。
- (ii) 補空間のレゾルベントが正則である。
- (iii) 極が観測する実周波数へ到達しない。

このとき式 (7.12) は固定した実 ω で滑らかであり、透過振幅や greybody factor も滑らかでありうる。個別留数の発散や mode exchange から、巨大な散乱応答を直ちに結論してはならない。極が実軸へ来る、クラスターが連続成分と衝突する、または補空間が特異になる場合は、別の極限解析が要る。

7.8 本章の結論

例外点は個別モード表示の限界を示すが、応答理論の限界ではない。Riesz 輪郭積分と Laurent 演算子へ移れば、二重極の時間応答、実周波数散乱、幾何学的位相をそれぞ

れ正則な量として定義できる。

研究問題：高次例外点と連続成分

三次以上の例外点または二次例外点と回転した連続成分の接近を扱え。最小限、必要な輪郭積分モーメントの個数、Laurent 演算子と時間多項式の次数、有限基底で輪郭を安定に選ぶ条件を決定せよ。個別固有ベクトルの condition number ではなく、固定した源と観測者の実周波数応答を最終的な有限性の判定に用いよ。

第 III 部

量子化された応答

第 8 章

マスター場の量子化

“What you have inherited from your fathers, earn it, in order to possess it.”

— Johann Wolfgang von Goethe, *Faust I*, “Night”

8.1 同じ作用を量子論で読む

古典論で用いた一つのマスター場を $\Psi(t, x)$ とし、作用を

$$I[\Psi] = \frac{1}{2} \int dt dx [(\partial_t \Psi)^2 - (\partial_x \Psi)^2 - V(x) \Psi^2] \quad (8.1)$$

とする。角運動量ラベルは省略した。共役運動量は

$$\Pi(t, x) = \partial_t \Psi(t, x) \quad (8.2)$$

である。量子化では Ψ と Π を演算子にし、等時交換関係

$$[\Psi(t, x), \Pi(t, x')] = i\delta(x - x'), \quad (8.3)$$

$$[\Psi(t, x), \Psi(t, x')] = [\Pi(t, x), \Pi(t, x')] = 0 \quad (8.4)$$

を課す。ここでは $\hbar = 1$ とした。Heisenberg 方程式は古典方程式と同じ

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + V) \Psi = 0 \quad (8.5)$$

である。線形場では、古典的な伝播演算子そのまま量子場の交換子を支配する。

8.2 遅延 Green 関数は交換子である

量子状態を密度演算子 ρ とする。本書の符号規約では、遅延 Green 関数を

$$G_R(t, x; t', x') = i\theta(t - t') \text{Tr}(\rho[\Psi(t, x), \Psi(t', x')]) \quad (8.6)$$

と定義する。交換子は線形方程式の下で演算子ではなく複素数値 (c-number) になるため、自由場の G_R は状態 ρ に依存しない。等時交換関係から時間微分の跳びが決まり、

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + V) G_R(t, x; t', x') = \delta(t - t')\delta(x - x') \quad (8.7)$$

を満たす。

外力 J を

$$H_{\text{int}}(t) = - \int dx J(t, x) \Psi(t, x) \quad (8.8)$$

で結合すると、一次の Kubo 応答は

$$\delta \langle \Psi(t, x) \rangle = \int dt' dx' G_R(t, x; t', x') J(t', x') \quad (8.9)$$

となる。これは第三章の古典 Green 関数による解と同じである。

原理

古典的応答と量子線形応答を結ぶ量は遅延 Green 関数である。線形場では、その解析接続の QNM 極も同じである。量子状態の情報は交換子ではなく、反交換子側に加わる。

8.3 状態を含む二点関数

量子状態を識別するには Wightman 関数

$$G^>(1, 2) = \text{Tr}(\rho \Psi(1) \Psi(2)), \quad (8.10)$$

$$G^<(1, 2) = \text{Tr}(\rho \Psi(2) \Psi(1)) \quad (8.11)$$

を用いる。1 = (t, x)、2 = (t', x') は時空点の略記である。スペクトル関数と対称相関を

$$\rho_\Psi(1, 2) = G^>(1, 2) - G^<(1, 2), \quad (8.12)$$

$$F_\Psi(1, 2) = \frac{1}{2} [G^>(1, 2) + G^<(1, 2)] \quad (8.13)$$

と定義すれば、 $G_R = i\theta(t - t')\rho_\Psi$ である。 ρ_Ψ は応答可能性を、 F_Ψ は状態に存在する揺らぎを表す。熱平衡では両者が第十章の揺動散逸関係で結ばれる。

8.4 散乱モードによる展開

実周波数の正規化された解を $u_{\omega a}(t, x)$ とする。 a は、無限遠から入射するモード、過去地平面から出るモードなど、独立な入射チャンネルを表す。場は

$$\Psi(t, x) = \sum_a \int_0^\infty d\omega [a_{\omega a} u_{\omega a}(t, x) + a_{\omega a}^\dagger u_{\omega a}^*(t, x)] \quad (8.14)$$

と展開できる。流束規格化を選べば

$$[a_{\omega a}, a_{\omega' b}^\dagger] = \delta_{ab} \delta(\omega - \omega') \quad (8.15)$$

である。反射係数と透過係数は同じ古典散乱行列に現れ、量子論では生成消滅演算子のチャンネル変換を与える。

QNM をこの展開の基本演算子にしてはならない。QNM は複素周波数の共鳴であり、実周波数の完全な散乱基底を解析接続した極である。量子場の正準交換関係を保つには、極だけでなく連続成分が必要である。

8.5 三つの真空

静的ブラックホールでは、正周波数をどの時刻に対して定めるかにより状態が変わる。外部の静的時刻に関する空状態は Boulware 状態、過去無限遠からの入射が真空中で未来へ Hawking 流束をもつ状態は Unruh 状態、永遠ブラックホールの両外部が熱平衡にある状態は Hartle–Hawking 状態とよばれる。

この分類で必要なのは、方程式と状態を分けることである。同じ G_R と散乱係数に、異なる occupation number が組み合わさる。地平面で正則か、無限遠で熱流束があるかは、状態の選択によって決まる。

注意

「ブラックホールの真空」は一つではない。QNM 周波数は背景と放射条件で決まるが、粒子数、ノイズ、Hawking 流束は状態と観測者に依存する。

8.6 本章の結論

マスター作用を正準量子化すると、古典的な遅延 Green 関数が場の交換子として再び現れる。極と greybody factor は古典論から引き継がれ、量子状態は Wightman 関

数と occupation number に入る。次章では、地平面近傍の解析性がその occupation number を熱的にすることを示す。

第 9 章

地平面の熱性

*“There are more things in heaven and earth, Horatio, than are
dreamt of in your philosophy.”*

— William Shakespeare, *Hamlet*, Act I, Scene 5

“For now we see through a glass, darkly.”

— 1 Corinthians 13:12, King James Version

9.1 近地平面は Rindler 時空である

静的球対称計量の単純地平面 $r = r_h$ に対し、表面重力を

$$\kappa = \frac{1}{2}f'(r_h) \quad (9.1)$$

と定義する。地平面近傍で $f(r) \simeq 2\kappa(r - r_h)$ である。固有距離 ρ を

$$r - r_h = \frac{\kappa}{2}\rho^2 \quad (9.2)$$

で導入すると、 t - r 部分は

$$ds^2 \simeq -(\kappa\rho)^2 dt^2 + d\rho^2 \quad (9.3)$$

となる。局所的には Rindler 時空である。亀座標は

$$r_* \simeq \frac{1}{2\kappa} \log(r - r_h) \quad (9.4)$$

であり、外向き零座標 $u = t - r_*$ は地平面で発散する。

9.2 Kruskal 座標と解析性

未来地平面で正則な零座標を

$$U = -e^{-\kappa u} \quad (9.5)$$

とする。外部領域では $U < 0$ である。静的時刻に関する外向き正周波数モードは

$$e^{-i\omega u} = (-U)^{i\omega/\kappa} \quad (9.6)$$

となり、 $U = 0$ に branch point をもつ。外部 $U < 0$ で $(-U)^{i\omega/\kappa} = \exp[(i\omega/\kappa) \text{Log}(-U)]$ とする。正周波数モードを複素 U 平面の下半面を通して $U > 0$ へ解析接続すると、

$$(-U)^{i\omega/\kappa} \longrightarrow e^{-\pi\omega/\kappa} U^{i\omega/\kappa} \quad (9.7)$$

となる。上半面を通る負周波数成分との組合せを正準規格化すると、地平面の両側の Bogoliubov 係数比に

$$\left| \frac{\beta_\omega}{\alpha_\omega} \right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa} \quad (9.8)$$

が現れる。 α_ω と β_ω は正・負周波数を混合する Bogoliubov 係数である。正準規格化と組み合わせると、boson の平均占有数は

$$n_H(\omega) = \frac{1}{e^{\beta_H \omega} - 1}, \quad \beta_H = \frac{2\pi}{\kappa} \quad (9.9)$$

となる。したがって Hawking 温度は

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (9.10)$$

である [18, 19]。

原理

熱因子は地平面近傍の指数写像 $U = -e^{-\kappa u}$ と正周波数の解析性から生じる。外部ポテンシャルは温度を変えず、生成された量子が無限遠へ届く確率を変える。

9.3 greybody factor の再登場

地平面近傍で熱的に占有された外向きモードは、有効ポテンシャルを透過して無限遠へ届く。第3章の透過確率 $\Gamma_\ell(\omega)$ を用いると、質量ゼロスカラー場のエネルギー流束は

$$\frac{dE}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{\omega \Gamma_\ell(\omega)}{e^{\beta_H \omega} - 1} \quad (9.11)$$

となる。平面黒体の Planck 分布に、ブラックホール外部の散乱データが掛かる。ここで古典応答の計算が量子放射へ直接使われる。

角運動量 a または電荷 Q をもつブラックホールでは、地平面生成子に対する周波数

$$\tilde{\omega} = \omega - m\Omega_H - q\Phi_H \quad (9.12)$$

が熱因子に入る。 m は方位角量子数、 q は場の電荷、 Ω_H は地平面角速度、 Φ_H は地平面電位である。 $\tilde{\omega} < 0$ の領域では superradiance と整合するよう、透過係数の流束符号も同時に扱う。

9.4 Euclid 時間による同じ温度

式 (9.3) で $t = -i\tau$ と Wick 回転すると、

$$ds_E^2 \simeq d\rho^2 + \kappa^2 \rho^2 d\tau^2 \quad (9.13)$$

となる。 $\rho = 0$ に円錐特異点を作らないためには

$$\tau \sim \tau + \frac{2\pi}{\kappa} \quad (9.14)$$

でなければならない。虚時間の周期が β_H に一致する。Bogoliubov 係数と Euclid 正則性は別の計算だが、同じ近地平面幾何を読んでいる。

9.5 面積エントロピーと第一法則

ここでは $G = c = \hbar = k_B = 1$ とする。事象地平面の面積を A_H とすれば、Bekenstein–Hawking エントロピーは

$$S_{\text{BH}} = \frac{A_H}{4} \quad (9.15)$$

である [18, 20]。一般の単位を戻せば $S_{\text{BH}} = k_B c^3 A_H / (4G\hbar)$ である。定常な Kerr–Newman ブラックホールの近接する解を結ぶ第一法則は

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_H + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q = T_H \delta S_{\text{BH}} + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \quad (9.16)$$

となる [21]。これは微視的状態数の導出ではない。応答理論に必要なのは、地平面へ入るエネルギー、角運動量、電荷の flux が、定常解の変化とエントロピー変化へどう換算されるかである。

Ryu–Takayanagi 公式への出口.

静的で漸近 AdS の古典重力が境界量子論を記述する場合、境界の空間領域 A の entanglement entropy は

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N} \quad (9.17)$$

と書かれる。 γ_A は A と同じ境界をもち、 A と homologous な bulk の codimension-two minimal surface である [22]。面積をエントロピーとして読む点で式 (9.15) を拡張するが、本書は AdS/CFT の辞書を構成しないため、この公式を以後の導出には用いない。時間依存版、量子補正、entropy wedge は本筋を変える具体的な応答問題が生じたときに研究問題へ送る。

9.6 状態の違い

Boulware 状態は無限遠の静的観測者にとって粒子を含まないが、地平面で特異である。Hartle–Hawking 状態は未来・過去地平面で正則で、外部を温度 T_H の熱浴に置く。Unruh 状態は崩壊で形成されたブラックホールに対応し、過去無限遠からの入射を真空にしながら、未来無限遠へ Hawking 流束を出す。

式 (9.10) は局所地平面の温度尺度を与えるが、すべての二点関数が同じ大域的熱平衡状態になるとは限らない。とくに Unruh 状態は静的外部全体の熱平衡ではない。

注意

Hawking 温度、遠方の粒子 flux、局所検出器の応答は同じ観測量ではない。温度は表面重力から、flux はさらに greybody factor と状態から、検出率は検出器の軌道と結合から決まる。

9.7 本章の結論

地平面の指数的な座標関係は、正周波数を混合して温度 $T_H = \kappa/(2\pi)$ を与える。外部の古典散乱は、その熱的占有数を greybody factor で濾過する。次章では、熱性を粒子数ではなく二点関数の KMS 条件として定式化する。

第 10 章

熱的 Green 関数

“The energy of the universe is constant. The entropy of the universe strives toward a maximum.”

— Rudolf Clausius, “Concerning Several Conveniently Applicable Forms for the Main Equations of the Mechanical Heat Theory” (1865)

10.1 KMS 条件

時間発展を生成する Hamiltonian を H とし、逆温度 β の平衡状態を

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \quad Z = \text{Tr } e^{-\beta H} \quad (10.1)$$

とする。Hermite 演算子 $O(t)$ に対して

$$G^>(t) = \text{Tr } (\rho_\beta O(t) O(0)), \quad (10.2)$$

$$G^<(t) = \text{Tr } (\rho_\beta O(0) O(t)) \quad (10.3)$$

を定義する。trace の巡回性と虚時間発展から

$$G^>(t) = G^<(t + i\beta) \quad (10.4)$$

を得る。これを Kubo–Martin–Schwinger (KMS) 条件とよぶ。有限系の Gibbs 行列を書けない場の理論でも、相関関数の解析性と式 (10.4) を熱平衡の定義にできる。

Fourier 変換を

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{+i\omega t} G(t) \quad (10.5)$$

とすれば、KMS 条件は detailed balance

$$G^>(\omega) = e^{\beta\omega} G^<(\omega) \quad (10.6)$$

となる。

10.2 Lehmann 表示

$H|n\rangle = E_n|n\rangle$ とし、 $O_{mn} = \langle m|O|n\rangle$ とする。完全系を二点関数へ挿入すれば、

$$G^>(\omega) = \frac{2\pi}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta E_n} |O_{mn}|^2 \delta(\omega - E_m + E_n), \quad (10.7)$$

$$G^<(\omega) = \frac{2\pi}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} |O_{mn}|^2 \delta(\omega - E_m + E_n) \quad (10.8)$$

を得る。delta 関数の上では $E_m - E_n = \omega$ なので、項ごとに $G^>(\omega) = e^{\beta\omega} G^<(\omega)$ が成り立つ。有限体積ではスペクトルは離散線の和であり、熱力学極限または有限分解能の粗視化によって滑らかなスペクトル関数になる。

この表示は、熱的 Green 関数が抽象的な解析関数であるだけでなく、観測量の行列要素と状態密度の和であることを示す。次章の ETH は、式 (10.7) に現れる個々の O_{mn} に滑らかな包絡を仮定し、一つの高エネルギー固有状態から同じ詳細釣り合いが現れる条件を問う。

10.3 スペクトル関数と揺らぎ

スペクトル関数と対称相関関数を

$$\rho_O(\omega) = G^>(\omega) - G^<(\omega), \quad (10.9)$$

$$F_O(\omega) = \frac{1}{2} [G^>(\omega) + G^<(\omega)] \quad (10.10)$$

と定義する。式 (10.6) から

$$F_O(\omega) = \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \rho_O(\omega) \quad (10.11)$$

を得る。

本書の遅延 Green 関数は

$$G_R(t) = i\theta(t) \text{Tr}(\rho_\beta[O(t), O(0)]) \quad (10.12)$$

である。実周波数の境界値に対し

$$\rho_O(\omega) = 2 \text{Im} G_R(\omega) \quad (10.13)$$

なので、揺動散逸関係は

$$F_O(\omega) = \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \text{Im } G_R(\omega) \quad (10.14)$$

となる。応答の散逸部分が、平衡状態の量子・熱揺らぎを定める。

注意

式 (10.13) の符号は遅延関数と Fourier 変換の規約に依存する。文献の式を移すときは、 G_R の前の i 、指数 $e^{\pm i\omega t}$ 、スペクトル関数の順序を一組として確認する。

10.4 吸収と放出

外部の弱い周期源 $j(t)$ を $-j(t)O(t)$ と結合する。単位時間当たりの吸収は、 $\omega > 0$ に対して $\rho_O(\omega)$ 、すなわち $\text{Im } G_R(\omega)$ に比例する。一方、状態自身の自発・誘導放出は $G^<(\omega)$ によって測られる。KMS 条件は

$$\frac{G^<(\omega)}{G^>(\omega)} = e^{-\beta\omega} \quad (10.15)$$

を要求する。

ブラックホールでは、古典的吸収断面積または greybody factor が ρ_O の実軸上の散逸を与える。Hartle–Hawking 状態では KMS 条件が吸収と放出を結び、Unruh 状態では外向き sector に Hawking 占有数が現れるが、大域的な熱平衡とはならない。

原理

古典吸収、量子放出、平衡ノイズは三つの独立な表ではない。遅延 Green 関数の虚部と KMS 条件が、それらを同じスペクトル関数へまとめる。

10.5 QNM と熱極を混同しない

有限温度計算では Euclid 周波数

$$\omega_n^E = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (10.16)$$

が現れる。これは虚時間の周期性から生じる Matsubara 周波数であって、放射境界条件の QNM 周波数ではない。Euclid 相関関数を適切に解析接続すれば遅延関数を得て、その別の sheet の極として QNM が現れる。

したがって、Matsubara 点の列と QNM 極の列が図の上で似ていても同一視してはならない。前者は熱状態のサンプリング点、後者は実時間応答の共鳴である。両者を結ぶには解析接続の一意性と高周波挙動が必要になる。

10.6 回転する熱平衡

定常回転系では、密度演算子は模式的に

$$\rho \propto \exp[-\beta(H - \Omega_H J - \Phi_H Q)] \quad (10.17)$$

となる。KMS 因子には式 (9.12) の $\tilde{\omega}$ が入る。漸近平坦 Kerr では superradiant mode のため、全外部領域を覆う通常の Hartle–Hawking 状態の構成には障害がある。熱因子を局所的に用いることと、大域的な Gibbs 状態の存在を区別する。

10.7 本章の結論

熱状態は KMS 条件で特徴づけられ、揺動散逸関係が状態依存の揺らぎを状態に依存しない遅延応答へ結ぶ。ブラックホールの古典吸収と量子放出は、この関係の両側に位置する。次章では、熱平衡を一つの固有状態の行列要素から説明しようとする ETH を導入する。

第 11 章

固有状態熱化仮説

井蛙不可以語於海者，拘於虛也；
夏蟲不可以語於冰者，篤於時也；
曲士不可以語於道者，束於教也。

— 『莊子』外篇「秋水」

11.1 一つの固有状態は熱いか

前章の KMS 条件は熱平衡状態の相関関数を特徴づける。しかし孤立量子系はユニタリに時間発展し、純粋状態のままである。それでも少数の自由度を測る観測量が熱平衡値へ近づく理由を、Hamiltonian の固有状態自身に求めるのが固有状態熱化仮説 (eigenstate thermalization hypothesis; ETH) である [23–26]。

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (11.1)$$

とし、観測量 O の行列要素を $O_{mn} = \langle m|O|n\rangle$ とする。標準的な ETH の仮定形 (ansatz) は

$$O_{mn} = \overline{O}(\overline{E})\delta_{mn} + e^{-S(\overline{E})/2}f_O(\overline{E},\omega)R_{mn} \quad (11.2)$$

である。ここで

$$\overline{E} = \frac{E_m + E_n}{2}, \quad \omega = E_m - E_n \quad (11.3)$$

であり、 $S(E)$ はミクロカノニカル・エントロピー、 $\overline{O}$ と f_O は巨視的なエネルギー尺度で滑らかな関数、 R_{mn} は平均零、単位分散の不規則な量である。

対角項は、一つの固有状態における静的期待値がミクロカノニカル平均へ近づくことを述べる。非対角項の $e^{-S/2}$ は個々の遷移を小さくするが、指数的に多い終状態と組み合わせあって有限な動的相関を作る。ETH は任意の Hamiltonian と任意の観測量に成立する定理ではない。可積分性、局在、量子多体傷跡、対称性は成立範囲を変える。

11.2 行列要素からスペクトル関数へ

一つのエネルギー固有状態 $|n\rangle$ における Wightman 関数は

$$G_n^>(t) = \langle n|O(t)O(0)|n\rangle = \sum_m e^{-i(E_m - E_n)t} |O_{nm}|^2 \quad (11.4)$$

である。Fourier 変換すると

$$G_n^>(\omega) = 2\pi \sum_m |O_{nm}|^2 \delta(\omega - E_m + E_n) \quad (11.5)$$

を得る。式 (11.2) を代入し、 E_n の近傍で状態密度を滑らかに近似する。熱力学関係

$$\beta(E) = \frac{\partial S(E)}{\partial E} \quad (11.6)$$

を用いて小さい ω についてエントロピーを展開すると、正負周波数の比は

$$\frac{G_n^>(\omega)}{G_n^<(\omega)} \simeq e^{\beta(E_n)\omega} \quad (11.7)$$

となる。したがって、一つの高エネルギー固有状態の粗視化した二点関数は、前章の KMS 詳細釣り合いを再現しうる。

原理

ETH が応答理論へ入る場所は、QNM 周波数そのものではなく観測量の行列要素である。対角要素が静的な状態方程式を、非対角要素の包絡 f_O がスペクトル関数と散逸を与える。

11.3 対称性を先に分ける

保存電荷 Q が Hamiltonian と可換ならば、Hilbert 空間は電荷の固有値ごとの部門へ分かれる。標準 ETH は、異なる電荷部門を混ぜず、一つの既約な部門の内部で述べる必要がある。観測量が電荷を運ぶ場合には、選択則によって部門間の行列要素だけが残る。したがって、式 (11.2) の R_{mn} をすべて独立な乱数とみなしてはならない。

複数の保存電荷が互いに可換しない非可換対称性では、すべての電荷を同時に対角化する基底がなく、対称性多重項による縮退も生じる。非可換 ETH は、この状況で局所観測量の時間平均と熱平均を比較するため、近似的なミクロカノニカル部分空間と対称性の表現構造を仮定形へ組み込む [27]。ここでは、その詳細ではなく、「対称性部門を

固定する」という標準的な処方自体が修正を要することだけを用いる。

11.4 高次形式対称性は観測量の範囲を変える

通常の大域対称性が点状の荷電演算子に作用するのに対し、 p 形式対称性は p 次元に広がった荷電演算子に作用する。このとき、局所演算子が熱化しても、線や面に広がる演算子が同じ統計集団へ熱化するとは限らない。

Fukushima と Hamazaki は、合理的な仮定の下で、 $(d+1)$ 次元量子場理論の p 形式対称性が、多くの非自明な $(d-p)$ 次元観測量に対する ETH を破りうることを示した [28]。 $(2+1)$ 次元 $\mathbb{Z}_2$ 格子ゲージ理論では、局所的なプラケット演算子は熱化する一方、磁気双極子を励起する拡張演算子は $\mathbb{Z}_2$ 一形式電荷を含む一般化 Gibbs 統計集団へ緩和する。

この結果から必要になるのは、「系は ETH を満たすか」という一つの判定ではない。どの対称性を固定し、どの次元と荷をもつ観測量を測り、どの統計集団と比較するかを明記した判定である。ゲージ場と境界自由度を含むブラックホール系でも、この区別を行わずに局所 ETH を拡張観測量へ外挿してはならない。

注意

対称性による ETH の修正から、特定のブラックホール微視的モデルの熱化または非熱化を直ちに結論することはできない。保存電荷、観測量の支持、境界条件、比較する統計集団を具体的に同定して初めて適用できる。

11.5 量子場理論とブラックホール応答の接点

場の理論では、局所演算子の ETH と有限領域の状態の ETH は同じ主張ではない。共形場理論については、高エネルギーのプライマリ固有状態における局所プローブが ETH を満たすならば、有限領域に支持をもち有限エネルギーを測る観測量へ拡張できることが示されている [29]。これは、局所的な行列要素から部分系の応答へ進むために必要な仮定を明確にする例である。

ブラックホールの線形応答は遅延 Green 関数 G_R で記述され、その実軸上の虚部は演算子 O のスペクトル関数である。もし微視的 Hamiltonian と外部場に結合する演算子が、適切な対称性部門で ETH を満たすならば、次の対応が期待される。

- (i) エントロピー $S(E)$ の微分が有効温度を定める。

- (ii) $f_O(E, \omega)$ が吸収と放出の滑らかな包絡を定める。
- (iii) 有限エントロピーの離散線を粗視化すると、滑らかなスペクトル関数が現れる。
- (iv) その遅延関数を解析接続した極が、古典的な応答極へ近づきうる。

これは古典 QNM から ETH を導く議論ではない。QNM は粗視化された遅延応答の解析接続にある極であり、ETH は微視的行列要素の仮説である。両者を結ぶには、対称性を保つ粗視化、演算子の対応、有限エントロピー誤差を別々に示さなければならない。

11.6 物理ミニマムとしての範囲

ETH のランダム行列模型、量子多体傷跡、可積分系、多体局在、時間順序外相関関数は、それぞれ独立した主題である。本書の主線に必要なのは、式 (11.2)、スペクトル和 (11.5)、KMS 条件への接続、対称性と観測量による成立範囲の修正だけである。

この範囲ならば ETH は情報問題の概説ではなく、遅延応答を微視的行列要素へ接続する終端になる。新しい対称性や微視的模型は、応答関数または比較する統計集団を実際に変える場合にだけ本文へ戻す。

11.7 本章の結論

ETH は、一つの高エネルギー固有状態から熱的な二点関数を得るための行列要素仮説である。ブラックホール応答との接点は QNM の数値ではなく、スペクトル関数、詳細釣り合い、対称性を保つ粗視化にある。可換電荷、非可換電荷、高次形式対称性は、熱化を判定する部門、観測量、統計集団を変える。

研究問題：対称性を分解した ETH 応答

有限エントロピーをもつゲージ理論または holographic Hamiltonian を一つ選び、通常の大域電荷と高次形式電荷、および測定する局所・拡張演算子の変換則を同定せよ。対称性部門ごとに行列要素を測り、標準 ETH が成立する観測量と、一般化 Gibbs 統計集団を必要とする観測量を分けよ。次に、粗視化した遅延 Green 関数の実軸スペクトル密度と解析接続された極を比較せよ。古典ブラックホールへの一致を前提にせず、成立する周波数窓、粗視化幅、エントロピー依存の誤差を結果として示すこと。

第 12 章

応答の不変量

“In discussion it is not so much weight of authority as force of argument that should be demanded.”

— Marcus Tullius Cicero, *De Natura Deorum*, I.10, trans. H. Rackham

12.1 表示を変えても残るもの

マスター場の選択、座標、基底、複素スケーリング角、固有ベクトルの規格化は計算に必要なが、単独では観測量ではない。本書の最後に、応答を構成する量の階層を整理する。

周波数領域の方程式を

$$\mathcal{L}(\omega)|\Psi\rangle = |S\rangle \quad (12.1)$$

とする。可逆な場の変換 $B(\omega)$ と方程式の組合せ変換 $A(\omega)$ により

$$|\Psi'\rangle = B|\Psi\rangle, \quad (12.2)$$

$$\mathcal{L}' = A\mathcal{L}B^{-1}, \quad (12.3)$$

$$|S'\rangle = A|S\rangle \quad (12.4)$$

と変える。このとき

$$\mathcal{G}' = B\mathcal{G}A^{-1} \quad (12.5)$$

である。観測操作を $\langle O'| = \langle O|B^{-1}$ と変換すれば、

$$\langle O'|\mathcal{G}'|S'\rangle = \langle O|\mathcal{G}|S\rangle \quad (12.6)$$

となる。Green 演算子の成分は変わっても、同じ物理的源と観測者を結ぶ振幅は変わらない。

12.2 何を比較するか

計算結果を比較するときは、次の階層を混ぜない。

表示.

r_* 、 V 、 ψ_n 、基底係数を比較するには、座標、場の定義、規格化をそろえる。

スペクトル.

QNM 極、分岐切断、Riesz クラスターを比較するには、境界条件、Riemann 面、輪郭積分路をそろえる。

古典応答.

$\langle O|G|S\rangle$ 、散乱行列、greybody factor を比較するには、物理的な源、観測操作、流束規格化をそろえる。

量子状態.

$G^>$ 、 $G^<$ 、粒子数、ノイズを比較するには、状態、時刻生成子、観測者をそろえる。

熱化.

$S(E)$ 、 $f_O(E, \omega)$ 、電荷部門を比較するには、粗視化、対称性、統計集団をそろえる。

QNM 周波数は admissible な場の再定義に対して安定だが、極が branch cut を横切ると sheet の指定が要る。演算子値留数は表現に従って変換するが、式 (12.6) の行列要素は不変である。例外点では個別留数を比較せず、同じ contour で定めた M_0 、 M_1 と源付き Laurent 係数を比較する。

12.3 因果律が与える分散関係

遅延 Green 関数は $t < 0$ で零である。この因果性により $G_R(\omega)$ は上半平面で解析的になる。無限遠で十分速く減衰する行列要素に対して、実軸上の実部と虚部は

$$\operatorname{Re} G_R(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G_R(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (12.7)$$

$$\operatorname{Im} G_R(\omega) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} G_R(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (12.8)$$

で結ばれる。P は Cauchy 主値である。高周波で定数や多項式が残る場合は subtraction を行う。

分散関係は、極の位置だけでなく連続成分も必要であることを実軸上で表している。吸収を変えずに分散だけを任意に変えることはできない。数値 Green 関数の実部と虚部を独立に検査する手段にもなる。

12.4 古典から量子統計までの一本の式

本書の主線は、次の因果的振幅に集約される。

$$\mathcal{A}_R(\omega) = \langle O | (H - (\omega + i0)^2)^{-1} | S \rangle \quad (12.9)$$

幾何学は H 、地平面は境界値 $+i0$ と放射条件、外力と検出器は $|S\rangle$ と $\langle O|$ に入る。解析接続すれば QNM と例外点が現れ、実軸上の虚部は吸収を与える。量子化すれば同じ量が交換子になり、状態を指定すれば KMS と揺動散逸関係が加わる。微視的固有状態へ戻れば、そのスペクトル密度は ETH の行列要素で表される。

原理

一つの表示を守るのではなく、因果的応答を守る。亀座標、Jost 解、QNM、複素スケーリング、Riesz cluster、KMS、ETH は、式 (12.9) を異なる領域で読むための道具である。

12.5 物理ミニマムの境界

非線形な合体からリングダウンへの接続、自己力、数値相対論との接続、AdS/CFT の辞書、量子重力の微視的状态、情報回収は重要である。しかし、それぞれを一章ずつ概説しても、本書の因果的応答は深くならない。具体的な源、観測量、Green 関数、または行列要素へ還元できたときにだけ、本書の次の版へ入れる。

同じ理由で、数値手法の一覧や既知 QNM 表は本文から外した。必要な計算は研究問題に置き、結果ではなく判定基準を示した。研究が完成すれば、そのうち主線を変えるものだけを本文へ戻し、残りは研究問題として更新する。

12.6 結語

ブラックホールは、古典場を吸収する散乱体であり、共鳴をもつ開放系であり、量子場に熱的揺らぎを与える地平面である。これらを別の比喩として並べる必要はない。因果的 Green 関数を中心に置けば、古典場の応答、非自己共役スペクトル、量子線形応答、熱化は同じ問題の連続した記述になる。

本書の物理ミニマムは、短くするための消極的な制限ではない。何を計算すれば観測量へ届くかを見失わないための選択である。

“And thence we came forth to see again the stars.”

— Dante Alighieri, *Inferno*, Canto XXXIV, line 139

付録 A

記法と規約

“The last thing we decide on in writing a book is what shall be the first we put in it.”

— Attributed to Blaise Pascal, *Pensées*, Brunschvicg 19, trans. C. Kegan Paul

本書で用いた規約をまとめる。異なる文献の公式を比較するときは、周波数の時間規約、Wronskian の順序、レゾルベントの符号を最初に確認する必要がある。

A.1 時空と単位系

計量の符号は $(-, +, +, +)$ 、幾何学単位系は $G = c = 1$ である。静的球対称計量を

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.1})$$

と書く。亀座標は $dr_*/dr = f(r)^{-1}$ により定義する。

A.2 Fourier 規約

時間依存性は

$$\Psi(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \psi(\omega, x) \quad (\text{A.2})$$

である。この規約では、 $\text{Im } \omega < 0$ が時間的減衰を表す。右向きの波は $e^{-i\omega(t-x)}$ 、左向きの波は $e^{-i\omega(t+x)}$ である。

A.3 演算子とレゾルベント

空間演算子、周波数演算子束、レゾルベントを

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{L}(\omega) = H - \omega^2, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{R}(z) = (H - z)^{-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{L}(\omega)^{-1} \quad (\text{A.6})$$

と定めた。文献によっては $(z - H)^{-1}$ をレゾルベントと定義するため、Riesz 射影の全体符号が変わる。本書の contour moment は式 (7.8) で直接定義し、この曖昧さを避けた。

A.4 Jost 解と Wronskian

左右の Jost 解は

$$f_{-}(x, \omega) \sim e^{-i\omega x}, \quad x \longrightarrow -\infty, \quad (\text{A.7})$$

$$f_{+}(x, \omega) \sim e^{+i\omega x}, \quad x \longrightarrow +\infty \quad (\text{A.8})$$

で規格化する。Wronskian は

$$\mathcal{W}(\omega) = f_{-} \frac{\partial f_{+}}{\partial x} - \frac{\partial f_{-}}{\partial x} f_{+} \quad (\text{A.9})$$

である。この順序に対して Green 核には式 (3.16) の負号が付く。

A.5 略号

本文では、quasinormal mode を QNM、complex scaling method を CSM、exceptional point を EP と略記した。Regge–Wheeler と Zerilli は、それぞれ RW、Z と略記する場合がある。

A.6 量子二点関数

遅延 Green 関数は

$$G_R(t) = i\theta(t)\langle [O(t), O(0)] \rangle \quad (\text{A.10})$$

と定義する。Fourier 変換は $\int dt e^{+i\omega t}$ であり、この規約ではスペクトル関数 $\rho_O = G^> - G^<$ と $\rho_O = 2 \text{Im } G_R$ が成り立つ。 $\hbar = 1$ とする。

A.7 複素解析上の注意

$z = \omega^2$ により、エネルギー平面と周波数平面は二重に覆われる。平方根、対数、Jost 解の解析接続では、切断と sheet を固定する必要がある。数値計算では、複素平面上の

点だけでなく、そこへ至る解析接続の経路を記録することが望ましい。

例外点を周回するときは、制御パラメータの経路、固有ベクトルの平行移動規約、双直交内積を指定する。固有値の置換、固有ベクトルの符号、幾何学的位相は関連するが、同一の主張ではない。

改訂試作版について

本改訂版は、「これから行う研究は研究問題へ送り、本筋に必要なものは削る」という方針で構成した。本文は、亀座標から古典的 Green 関数を作り、その極と連続成分を読み、同じ遅延関数を量子交換子、KMS 条件、ETH の行列要素へ接続するところまでを一つの主線とし、最後に応答不変量へ戻した。想定読者を学部四年生と明記し、未来地平面で正則な座標、重力摂動の非放射部門、源から波形と flux への一つの完全な鎖、Kerr の放射条件と superradiance、面積エントロピーと第一法則を物理ミニマムとして補った。Ryu-Takayanagi 公式は本筋の導出には用いず、面積則から境界理論へ出るための短い標識にとどめた。

通常の章末小問は置かない。極限地平面、長距離 Jost 関数、Kerr QNM の数値実装、極とテールの一様近似、de Sitter 連続応答、高次例外点、対称性を分解した ETH を研究問題とした。これらは本文の理解を確認する問題ではなく、本文の仮定を越えるための出発点である。

今後の改訂では、章を増やすこと自体を目標にしない。新しい結果が、源と観測者を結ぶ因果的応答を変えるか、表示依存の量から新しい不変量を分離する場合にだけ本文へ戻す。数値手法の比較、既知周波数の表、一般論の網羅は、主線を変えない限り研究問題または別冊の実装ノートに置く。参考文献を除く本文百頁程度は編集上の目安であり、定義の順序を壊す厳格な上限とはしない。

参考文献

- [1] T. Regge and J. A. Wheeler, “Stability of a Schwarzschild singularity,” *Phys. Rev.* **108** (1957) 1063–1069.
- [2] F. J. Zerilli, “Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics,” *Phys. Rev. D* **2** (1970) 2141–2160.
- [3] V. Moncrief, “Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. I. The exterior problem,” *Annals Phys.* **88** (1974) 323–342.
- [4] K. Martel and E. Poisson, “Gravitational perturbations of the Schwarzschild spacetime: A practical covariant and gauge-invariant formalism,” *Phys. Rev. D* **71** (2005) 104003, [arXiv:gr-qc/0502028](#).
- [5] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, 09, 1998.
<https://doi.org/10.1093/oso/9780198503705.001.0001>.
- [6] S. Chandrasekhar, “On the equations governing the perturbations of the Schwarzschild black hole,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **343** no. 1634, (1975) 289–298.
- [7] S. A. Teukolsky, “Rotating black holes - separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations,” *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 1114–1118.
- [8] H. Motohashi, “Resonant Excitation of Quasinormal Modes of Black Holes,” *Phys. Rev. Lett.* **134** no. 14, (2025) 141401, [arXiv:2407.15191 \[gr-qc\]](#).
- [9] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, “Quasinormal modes of black holes and black branes,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 163001, [arXiv:0905.2975 \[gr-qc\]](#).
- [10] S. Ogawa, T. Hirose, and O. Morikawa, “Complex scaling approach to quasinormal modes of Schwarzschild and Reissner–Nordström black holes,” [arXiv:2604.20442 \[hep-th\]](#).
- [11] J. L. Jaramillo, R. Panosso Macedo, and L. Al Sheikh, “Pseudospectrum and Black Hole Quasinormal Mode Instability,” *Phys. Rev. X* **11** no. 3, (2021) 031003, [arXiv:2004.06434 \[gr-qc\]](#).

- [12] E. W. Leaver, “An Analytic representation for the quasi normal modes of Kerr black holes,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **402** (1985) 285–298.
- [13] E. W. Leaver, “Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry,” *Phys. Rev. D* **34** (1986) 384–408.
- [14] R. Suzuki, T. Myo, and K. Katō, “Level density in complex scaling method,” *AIP Conf. Proc.* **768** no. 1, (2005) 455, [arXiv:nucl-th/0502012](#).
- [15] S. Ogawa, O. Morikawa, and T. Hirose, “Quasinormal modes and continuum response of de Sitter black holes via complex scaling method,” [arXiv:2605.03277 \[hep-th\]](#).
- [16] O. Morikawa, S. Ogawa, and T. Hirose, “Riesz–Laurent representation of black-hole scattering and sourced response at exceptional points,” [arXiv:2608.14752 \[gr-qc\]](#).
- [17] O. Morikawa, S. Ogawa, and S. Onoda, “Geometric phase from encircling an exceptional point of a quantum resonance in the complex-scaling method,” *Phys. Rev. A* **113** no. 5, (2026) 052225, [arXiv:2512.24528 \[quant-ph\]](#).
- [18] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199–220.
- [19] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [20] J. D. Bekenstein, “Black Holes and Entropy,” *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333–2346.
- [21] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The Four Laws of Black Hole Mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161–170.
- [22] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602, [arXiv:hep-th/0603001 \[hep-th\]](#).
- [23] J. M. Deutsch, “Quantum statistical mechanics in a closed system,” *Phys. Rev. A* **43** (1991) 2046–2049.
- [24] M. Srednicki, “Chaos and quantum thermalization,” *Phys. Rev. E* **50** (1994) 888–901.
- [25] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, “Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems,” *Nature* **452** (2008) 854–858, [arXiv:0708.1324 \[cond-mat.stat-mech\]](#).

- [26] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, “From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics,” *Adv. Phys.* **65** (2016) 239–362, [arXiv:1509.06411 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [27] C. Murthy, A. Babakhani, F. Iniguez, M. Srednicki, and N. Yunger Halpern, “Non-Abelian eigenstate thermalization hypothesis,” *Phys. Rev. Lett.* **130** no. 14, (2023) 140402, [arXiv:2206.05310 \[quant-ph\]](#).
- [28] O. Fukushima and R. Hamazaki, “Violation of Eigenstate Thermalization Hypothesis in Quantum Field Theories with Higher-Form Symmetry,” *Phys. Rev. Lett.* **131** no. 13, (2023) 131602, [arXiv:2305.04984 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [29] N. Lashkari, A. Dymarsky, and H. Liu, “Eigenstate Thermalization Hypothesis in Conformal Field Theory,” *J. Stat. Mech.* **1803** no. 3, (2018) 033101, [arXiv:1610.00302 \[hep-th\]](#).

索引

- admissible, 57
- AdS/CFT, 47, 59
- Bekenstein–Hawking エントロピー, 46
- Bogoliubov 係数, 45, 46
- Boulware 状態, 42
- branch cut, 22, 57
- branch point, 18, 45
- branch structure, 23
- bulk, 47
- c-number, 41
- Cauchy 主値, 57
- codimension-two minimal surface, 47
- complex scaling method, 61
- condition number, 38
- continued fraction 法, 22
- contour moment, 35, 61
- contour 法, 23
- CSM, 30
- detailed balance, 48
- Eddington–Finkelstein 座標, 4
- entanglement entropy, 47
- entropy wedge, 47
- ETH, iv, 52, 53
- Euclid 周波数, 50
- Euclid 時間, 46
- Euclid 正則性, 46
- Euclid 相関関数, 51
- exceptional point, 61
- exterior complex scaling, 30
- Fourier 規約, 60
- gauge-invariant, 10
- Gibbs 状態, 51
- Green 核, 15, 61
- Green 演算子, 14, 17, 56
- greybody factor, 16, 47
- Hartle–Hawking 状態, 42
- Hawking 占有数, 50
- Hawking 流束, 42
- Hawking 温度, 45, 47
- Heisenberg 方程式, 40
- Hermite 演算子, 48
- Hilbert 空間, 20, 53
- holographic Hamiltonian, 55
- homologous, 47
- Jordan 鎖, 36
- Jost 規格化, 8
- Jost 解, 15, 61
- Kerr 時空, 12
- Kerr–Newman ブラックホール, 46
- Killing energy flux, 12
- Killing 地平面, 3

KMS 条件, 48, 50, 52

Kruskal 座標, 44

Kubo 応答, 41

Kubo–Martin–Schwinger (KMS) 条件, 48

Laplace 演算子, 5

Laurent 係数, 37, 57

Laurent 演算子, 35, 37, 38

Lehmann 表示, 49

Lyapunov 指数, 22

matched asymptotic expansion, 8

Matsubara 周波数, 51

Matsubara 点, 51

mode exchange, 37

null infinity, 11

occupation number, 42, 43

overtone, 22

Pöschl–Teller 障壁, 21

parameter loop, 37

parity, 10

Petrov 型 D, 12

Planck 分布, 46

prompt response, 26

QNM, 7, 19, 20

QNM の完全性, 17

QNM 周波数, 19

quasinormal mode, 61

Regge–Wheeler 場, 10

Reissner–Nordström 時空, 8

Riemann sheet, 14

Riemann 面, 57

Riesz contour moment, 35

Riesz moment, 35

Riesz クラスター, 57

Riesz 射影, 61

Riesz 輪郭積分, iv

Riesz–Laurent 表示, 36

Rindler 時空, 44

RW–Zerilli 波動方程式, 10

Ryu–Takayanagi 公式, 63

Schwarzschild ブラックホール, 4

Schwarzschild–de Sitter 時空, 7

sheet, 14, 34, 57, 61

stress tensor, 11

subtraction, 57

superradiance, 12, 46, 63

superradiant mode, 51

tail, 26

Teukolsky 分離, 12

Teukolsky 変数, 12

trace, 32, 48

trace subtraction, 33

Unruh 状態, 42

Volterra 方程式, 18

Wick 回転, 46

Wightman 関数, 41, 43

Wronskian, 15, 18, 60, 61

Zerilli 場, 10

zero-damped mode, 23

エネルギー固有状態, 53

エネルギー平面, 61

クラスター, 34

ゲージ不変量, 15

ゲージ場, 54

スピン重み付き回転楕円面調和関数,
12

スペクトル, 14

スペクトル密度, 55, 58

スペクトル関数, 41, 49, 50, 61

ノイズ模型, 26

パラメータ空間, 37

ブラックホールの真空, 42

ブラックホール地平面, 7

ブラックホール微視的模型, 54

ブラックホール摂動論, iv, 2

プライマリ固有状態, 54

ブラケット演算子, 54

マスター場, 9

ミクロカノニカル・エントロピー, 52

ミクロカノニカル平均, 52

モード含有率, 27

モード強度, 20

ユニタリ, 52

ランダム行列模型, 55

リングダウン, 24

レゾルベント, 13, 60

レゾルベント差, 32

レゾルベント集合, 14

一形式電荷, 54

一様回転, 31

一様近似, 28

一般化 Gibbs 統計集団, 54, 55

一般相対論, iv

上半平面, 57

不安定 QNM, 21

不安定光子軌道, 22

不連続性, 26, 27

中間時刻の漸近領域, 26

亀座標, 3

事象地平面, 4

二重極, 34, 36

交換子, 40, 41

仮定形 (ansatz) , 52

伝播演算子, 40

位相的不変量, 37

例外点, 34

保存電荷, 53

先進時刻, 3

入射チャンネル, 42

共形場理論, 54

共役運動量, 40

共鳴, iv, 17

円錐特異点, 46

冪減衰, 24, 26

冪零部分, 34

分岐切断, 17, 26

分散関係, 57

切断, 61

初期データ, 25, 28

初期値, 25

励起振幅, 23

動径零測地線, 3

- 単極・双極, 10
- 単純地平面, 44
- 単純極, 17, 20
- 即時応答, 26, 27
- 双直交内積, 62
- 双直交展開, iv
- 双直交接続, 37
- 双直交規格化, 31
- 反交換子, 41
- 反射振幅, 16
- 反時計回り, 35
- 古典場の散乱, iv
- 可積分性, 52
- 可逆な場の変換, 56
- 右・左固有ベクトル, 31
- 吸収断面積, 50
- 周波数レゾルベント, 35
- 周波数平面, 61
- 周波数応答, 14
- 周波数演算子束, 60
- 回転角, 32
- 因果律, 26
- 因果性, 57
- 因果構造, 4
- 因果的 Fourier–Laplace 変換, 14
- 因果的な演算子, iv
- 因果的振幅, 58
- 固有値の置換, 62
- 固有状態熱化仮説, vi, 52
- 固有空間, 34
- 固有距離, 44
- 固有関数, 13
- 地平面, 2
- 地平面生成子, 12, 46
- 地平面角速度, 46
- 地平面電位, 46
- 境界 flux, 21
- 境界値, 14
- 境界自由度, 54
- 境界量子論, 47
- 外向き零座標, 44
- 外部複素スケーリング, 30
- 多体局在, 55
- 大円弧, 17
- 大域対称性, 54
- 孤立量子系, 52
- 宇宙論的地平面, v, 7
- 完全展開, 26
- 完全系, 20, 49
- 密度演算子, 40
- 対称性多重項, 53
- 対称相関, 41
- 対称相関関数, 49
- 対角要素, 53
- 射影, 34
- 小周波展開, 27
- 局在, 52
- 局所プローブ, 54
- 局所検出器, 47
- 局所演算子, 54
- 局所観測量, 53
- 平均占有数, 45
- 平方根, 34
- 平方根分岐, 34
- 平行移動規約, 62
- 平衡ノイズ, 50

- 平衡状態, 48
平面波, 4
幾何学単位系, 2, 60
幾何学的位相, 37, 62
微視的 Hamiltonian, 54
微視的状态, 59
応答不変量, vi
応答関数, vi

悪条件化, 35
情報回収, 59
拘束方程式, 9
拡張演算子, 54, 55
揺動散逸関係, 41, 50, 51
放射境界値問題, 19
放射条件, 7
放射自由度, 10
散乱モード, 42
散乱問題, 2
散乱基底, 42
散乱理論, v
散乱行列, 11
散逸部分, 50
数値求積点, 31
数値相対論, 59
数値離散化, 27
方位角量子数, 46
既約な部門, 53
時間規約, 60
時間順序外相関関数, 55
曲がった時空の量子場, iv
最小解条件, 22
有効な源, 25
有効ポテンシャル, 2, 6
有効温度, 54
有限エネルギー, 21
有限エントロピー, 55
有限体積, 49
有限基底, 31
有限領域, 54
格子ゲージ理論, 54
検出率, 47
極性, 10
極近似, 24
極限ブラックホール, 7
正則な部分, 17
正周波数モード, 45
正準交換関係, 42
正準規格化, 45
正準量子化, 42
比較演算子, 32
波形再構成, 11
流束, 16
流束保存, 16
流束規格化, 16, 42
準固有振動, 7
演算子値留数, 17, 20, 57
演算子束, 14
漸近 AdS, 47
漸近平坦, 18
漸近端, 2, 4
漸近級数, 22

無限小座標変換, 10
熱力学極限, 49
熱化, iv

- 熱因子, 45, 46
- 熱平衡, 48, 50
- 熱浴, 47
- 片側 Fourier–Laplace 変換, 25
- 特殊関数, iv
- 状態密度, 49, 53
- 球面調和関数, 5
- 生成消滅演算子, 42
- 留数, 20
- 留数演算子, 35
- 相関関数, 48
- 磁気双極子, 54
- 積分路, 14, 17
- 積分路変形, iv
- 空間演算子, 13, 60
- 空間の無限遠, 5
- 第一法則, 46, 63
- 等時交換関係, 40, 41
- 粗視化, 49, 53, 55, 57
- 粗視化幅, 55
- 純粋状態, 52
- 結合チャンネル, 33
- 線形化 Einstein 方程式, 11
- 線形汎関数, 14
- 縮退, 34
- 群速度, 16

- 自乗可積分, 7, 30
- 自己共役作用素, 14
- 自己力, 59
- 自己直交性, 35
- 自由場, 41
- 自発・誘導放出, 50

- 荷電演算子, 54
- 虚時間, 46
- 虚時間発展, 48
- 行列要素, 20
- 表現構造, 53
- 表面重力, 44, 47
- 補空間, 37
- 複素スケーリング, 21
- 複素スケーリング法, 30
- 複素スケーリング角, 56
- 複素周波数, 6
- 複素固有値, 32
- 複素経路, 30, 31
- 規格化, 56, 57
- 観測操作, 11
- 角固有値, 12
- 角運動量量子数, 5
- 解析接続, iv, 14, 45, 61, 62
- 解析構造, 13
- 計量再構成, 12
- 計量摂動, 9
- 詳細釣り合い, 49, 53
- 負周波数成分, 45
- 質量ゼロスカラー場, 5
- 超幾何方程式, 21
- 超幾何関数, iv
- 軸性, 10
- 輪郭積分モーメント, 37
- 輪郭積分路, 57
- 近似的なミクロカノニカル部分空間,
53

- 逆 Fourier 変換, 36

- 逆温度, 48
- 透過振幅, 16
- 連続スペクトル, 13, 31
- 連続準位密度, 32
- 遅延 Green 関数, 14
- 遅延時刻, 3
- 遅時間テール, 26, 27
- 選択則, 53
- 部分系, 54
- 重力放射, 10
- 重力波, 11
- 重力波ストレイン, 24
- 量子化, 40
- 量子場の揺らぎ, iv
- 量子場理論, v
- 量子多体傷跡, 52, 55
- 量子統計, v
- 量子線形応答, 41, 59
- 量子重力, 59
- 開いた系, iv
- 開放波動問題, 12
- 離散化された連続成分, 31
- 離散固有値, 31
- 離散線, 49
- 電荷の固有値ごとの部門, 53
- 電荷部門, 57
- 静的時刻, 2
- 静的球対称計量, 60
- 非可換 ETH, 53
- 非可換対称性, 53
- 非対角要素, 53
- 非自己共役, 31
- 非自己共役スペクトル, iv, 32, 59
- 非自己共役作用素, v
- 非自己共役問題, 22
- 非解析性, 18, 27
- 面積エントロピー, 63
- 面積半径, 2
- 高次形式対称性, 55
- 高次縮退, v

森川億人

理化学研究所 数理創造研究センター (iTHEMS)

〒351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1

okuto.morikawa@riken.jp、okuto.morikawa@kyudai.jp

<https://sites.google.com/view/o-morikawa>

ORCID : 0000-0002-0044-4491

小川翔也

九州大学 大学院理学研究院 物理学部門

〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744

ogawa.shoya.615@m.kyushu-u.ac.jp

<https://sites.google.com/view/s-ogawa>

ORCID : 0000-0003-0900-2486

廣瀬拓哉

九州産業大学 基礎教育サポートセンター

〒813-8503 福岡県福岡市東区松香台 2-3-1

t.hirose@ip.kyusan-u.ac.jp

九州産業大学 教員紹介

ORCID : 0000-0003-0962-8884

AI 協働者：Codex

OpenAI の AI システム。構成、初稿、編集および組版の協働者として、本書の制作に参加した。
最終的な内容と刊行物に対する責任は、上記三名の著者が負う。

2026 年 8 月 19 日。

本書に関する連絡は、上記のいずれかの電子メールアドレスまで。

刊行前原稿。本書の最新版および関連資料は、[著者管理リポジトリ](#)から入手できる。