

量子共鳴を大域接続問題として理解する
問題・演習 完全解答集

森川億人 小川翔也

2026年8月

本解答集の使い方

本冊子は、英語版教科書 *Quantum Resonance as a Global Connection Problem* の Stage I–VIII の99問と、再総和付録の7問を すべて解く。問題番号は本体と一致する。各解答では、結論だけでなく、符号、作用素の定義域、解析接続するシート、境界条件、数値計算の収束判定 まで明記する。数値実験を要求する問題については、再現可能なアルゴリズムと合否基準を解答の一部とした。

式の記法は本体に合わせる。特に $\mathcal{R}(z) = (z - H)^{-1}$ 、虚数単位 i 、微分記号 d 、積分測度 dx 、入射接続係数 C_{in} を用いる。

Contents

1	Stage I : 作用素・直積分・Fredholm 理論	1
I.1	effect と POVM	1
I.2	区間上の運動量の自己共役拡張	1
I.3	弱収束と確率の逃散	2
I.4	運動量表示からエネルギー直積分へ	3
I.5	multiplicity-one の commutant	3
I.6	スペクトル測度の二例	4
I.7	resolvent の解析性	4
I.8	Feshbach 作用素と微分 metric	5
I.9	閾値付き Lorentzian の生存振幅	5
I.10	四つの収束位相	6
I.11	compact 作用素への強収束の一様化	7
I.12	自由 Green kernel の Hilbert-Schmidt 性	7
I.13	Birman-Schwinger の符号	8
I.14	解析 Fredholm 逆の留数	8
I.15	乗算作用素は compact でない	9
2	Stage II : 散乱、Jost 関数、長距離相関	10
II.1	二体問題の分離	10
II.2	Lippmann-Schwinger 方程式の符号	10
II.3	三次元自由 Green 関数と Born 振幅	11
II.4	多 channel 断面積の flux	12
II.5	光学定理と吸収	12
II.6	Jost 解による radial Green 関数	13
II.7	Coulomb 対数位相	14
II.8	Dollard modifier	14
II.9	三荷電粒子の漸近領域	15
II.10	soft-photon coherent dressing	15
II.11	Lagrange 恒等式	16
II.12	逆二乗 potential の limit-point 閾値	16
II.13	Sturm-Liouville Green kernel の jump	17
II.14	球形井戸の Jost 関数	17
II.15	Wronskian 微分と Gamow 規格化	18
3	Stage III : exact WKB と大域接続	19
III.1	Riccati 係数	19
III.2	最も単純な lateral Borel 和	20

III.3	単純 turning point と Airy 接続	20
III.4	Stokes 行列の path ordering	21
III.5	barrier resonance と Gamow 幅	22
III.6	inverted Rosen–Morse の pole	22
III.7	単純零点と二重零点の Laurent 展開	23
III.8	cubic metastable potential の Stokes graph	24
III.9	analytic coordinate rotation と Voros period	24
III.10	piecewise constant barrier の transfer matrix	25
4	Stage IV : pole の諸実現と continuum response	26
IV.1	flat continuum の Feshbach 自己 energy	26
IV.2	実 dilation から complex scaling へ	26
IV.3	outgoing wave の square integrability と cut の回転	27
IV.4	free essential spectrum と ABC の compact step	28
IV.5	Berggren–Zel’dovich Gaussian continuation	28
IV.6	Gamow functional の test-space continuity	29
IV.7	continuum level density と 散乱位相	29
IV.8	有限基底の複素固有値の分類	30
IV.9	complex-symmetric 行列の c product	31
IV.10	三つの regularization の同値性	31
IV.11	pole residue の微分公式	32
IV.12	Breit–Wigner 位相と time delay	32
IV.13	Fano line shape	33
IV.14	threshold 近傍で異なる幅の定義	33
5	Stage V : radial exact WKB と monodromy	35
V.1	d 次元 radial 方程式	35
V.2	origin の Frobenius 分類	35
V.3	Langer map の導出	36
V.4	三次元 harmonic oscillator の二つの量子化	37
V.5	Coulomb bound spectrum	37
V.6	small-circle monodromy の regulator independence	38
V.7	radial oscillator の quartic 摂動と最適化	39
V.8	Cornell potential の turning points	39
V.9	Yukawa-screened Coulomb の threshold	40
V.10	座標変換が作る見かけの singularity	41
6	Stage VI : few-body continuum、CDCC、complex scaling	42
VI.1	二 cluster projectile の座標と reduced mass	42
VI.2	CDCC coupled radial 方程式	43
VI.3	momentum bin と強収束	43
VI.4	geometric Gaussian basis の pseudostate	44

VI.5	open/closed Coulomb channel の境界条件	45
VI.6	closed channel の消去	45
VI.7	complex-scaled smoothing	46
VI.8	$\alpha+p+n$ の Jacobi sets と isospin exchange	47
VI.9	$p+p+7\text{Be}$ の二 rearrangement と double counting	47
VI.10	zero recoil での s-wave enhancement	48
VI.11	$\alpha+n+n$ の Jacobi 変換と neutron exchange	48
VI.12	6He response と pole term の符号	49
VI.13	Riesz projector の pseudostate 表現	50
VI.14	三体 phase-space Jacobian	50
VI.15	二 channel incoming block の pole residue	51
7	Stage VII : exceptional point と幾何学的 holonomy	52
VII.1	2-by-2 complex-symmetric EP	52
VII.2	Jordan chain と resolvent の二重 pole	52
VII.3	EP の self-orthogonality	53
VII.4	branch point の一周と二周	53
VII.5	biorthogonal Berry connection	54
VII.6	momentum bin と continuum normalization	55
VII.7	bin-width independence の RG 方程式	55
VII.8	EP と continuum threshold の競合	56
VII.9	condition number と pseudospectrum	56
VII.10	multiple-zero continuation test	57
8	Stage VIII : Regge–Wheeler 方程式と black-hole QNM	58
VIII.1	Schwarzschild tortoise 座標	58
VIII.2	spherical harmonics の parity と odd metric 成分	58
VIII.3	linearized Einstein 方程式から covariant Regge– Wheeler 方程式へ	59
VIII.4	Regge–Wheeler potential と低 multipole	60
VIII.5	horizon と infinity の符号	61
VIII.6	barrier-top WKB による fundamental QNM	61
VIII.7	tortoise coordinate の complex scaling	62
VIII.8	Gaussian basis 行列と conditioning	62
VIII.9	Schwarzschild–de Sitter の二 horizon と Nariai limit	63
VIII.10	QNM pole と continuum level density	64
9	付録 R : 再総和・最適化・instanton	65
R.1	quartic integral の厳密式	65
R.2	coefficient ratio から Borel singularity	66
R.3	direct Padé と Borel–Padé at $g=0.4$	66
R.4	third-order optimized perturbation	67

R.5 ODM の独立実装 68

R.6 dispersion relation から large order 69

R.7 Rosen–Morse における instanton action の対応物 69

第1部

Stage I：作用素・直積分・Fredholm 理論

I.1 effect と POVM

問題

$0 \leq F \leq \mathbf{1}$ に対する Born 則が $[0, 1]$ の確率を与えることを示し、射影値でない二値 POVM を作れ。

解答

密度作用素を $\rho \geq 0$, $\text{Tr} \rho = 1$ とする。正作用素の順序は $0 \leq \rho^{1/2} F \rho^{1/2} \leq \rho$ を与えるから、

$$0 \leq p(F) = \text{Tr}(\rho F) = \text{Tr}(\rho^{1/2} F \rho^{1/2}) \leq \text{Tr} \rho = 1. \quad (1.1)$$

二準位系で $0 < \eta < 1$ とし

$$F_1 = \eta |1\rangle\langle 1|, \quad F_0 = \mathbf{1} - F_1 \quad (1.2)$$

と置けば、 $F_0 + F_1 = \mathbf{1}$ だが $F_1^2 = \eta F_1 \neq F_1$ なので PVM ではない。励起状態を効率 η でのみ検出する有限効率検出器である。より対称な有限分解能測定は、鋭い射影 P を $F_{\pm} = (\mathbf{1} \pm \eta(2P - \mathbf{1}))/2$ へばかして得られる。

I.2 区間上の運動量の自己共役拡張

問題

$P = -i\hbar d/dx$ on $(0, L)$ に境界条件 $\psi(L) = e^{i\alpha}\psi(0)$ を課し、自己共役性と固有値を求めよ。

解答

最大作用素の関数 $\phi, \psi \in H^1(0, L)$ に対して

$$\langle \phi, P\psi \rangle - \langle P\phi, \psi \rangle = -i\hbar[\phi^*(L)\psi(L) - \phi^*(0)\psi(0)]. \quad (1.3)$$

両者が同じ準周期条件を満たせば右辺は0である。逆に、 P^* の定義域に属する ϕ について右辺が全ての ψ に対して0になるには $\phi(L) = e^{i\alpha}\phi(0)$ が必要である。したがって $D(P^*) = D(P)$ で自己共役である。 $P\psi = p\psi$ の解は $\psi = Ce^{ipx/\hbar}$ であり、

$$e^{ipL/\hbar} = e^{i\alpha}, \quad p_n = \frac{\hbar}{L}(2\pi n + \alpha), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

$\psi_n = L^{-1/2}e^{ip_n x/\hbar}$ となる。境界位相が作用素の定義域、したがってスペクトルの一部であることが要点である。

I.3 弱収束と確率の逃散**問題**

正規直交列 e_n が0へ弱収束するがノルム収束しないことを示せ。

解答

任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し Bessel の不等式 $\sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2$ が成り立つので、各項は0へ収束する。従って $e_n \rightarrow 0$ 。一方 $\|e_n\| = 1$ だからノルム収束しない。 $e_n(x) = \phi(x - n)$ かつ $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ なら、任意の固定コンパクト集合 K について

$$\int_K |e_n(x)|^2 dx = \int_{K-n} |\phi(y)|^2 dy \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

全確率は1のままだが、有限位置の検出器から確率が逃げる。

I.4 運動量表示からエネルギー直積分へ

問題

$d^3p = p^2 dp d\Omega$ と $E = p^2/(2\mu)$ からユニタリな エネルギー表示を導け。

解答

$dE = (p/\mu) dp$ 、従って $p^2 dp = \mu p dE$ である。 $\psi(\mathbf{p}) = \psi(p, \Omega)$ に対し

$$(U\psi)(E, \Omega) = (\mu p)^{1/2} \psi(p, \Omega), \quad p = \sqrt{2\mu E} \quad (1.6)$$

と定めると

$$\|U\psi\|^2 = \int_0^\infty dE \int d\Omega \mu p |\psi(p, \Omega)|^2 \quad (1.7)$$

$$= \int_0^\infty p^2 dp \int d\Omega |\psi(p, \Omega)|^2 = \|\psi\|^2. \quad (1.8)$$

従って U は $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)$ から $\int_{[0, \infty)}^\oplus L^2(S^2, d\Omega) dE$ へのユニタリ写像で、 H_0 は各 fiber 上で E の乗算になる。

I.5 multiplicity-one の commutant

問題

全ての乗算作用素と可換な有界作用素を決定せよ。

解答

$AM_f = M_f A$ とする。特に任意の可測集合 Δ の M_{χ_Δ} と可換なので、 A は Δ に台を持つ関数を同じ Δ 内へ写す。有限測度の場合 $g = A\mathbf{1}$ と置くと、単関数 $s = \sum_j c_j \chi_{\Delta_j}$ に対し

$$As = \sum_j c_j M_{\chi_{\Delta_j}} A\mathbf{1} = gs. \quad (1.9)$$

単関数の稠密性から $A = M_g$ 、また特性関数で評価して $g \in L^\infty$ かつ $\|g\|_\infty \leq \|A\|$ 。sigma 有限の場合は有限 測度部分に制限して貼り合わせる。fiber 次元が $m(E) > 1$ なら、同じ議論がエネ

ギーを混ぜないことだけを強制し、 $A = \int^{\oplus} A(E) d\mu(E)$ 、 $A(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{m(E)})$ となる。

I.6 スペクトル測度の二例

問題

二準位 Hamiltonian と一次元自由粒子 wave packet のスペクトル測度を求めよ。

解答

$H = E_1 P_1 + E_2 P_2$ 、 $\psi = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle$ なら

$$\mu_{\psi}(\Delta) = \langle \psi, P_H(\Delta) \psi \rangle = |c_1|^2 \chi_{\Delta}(E_1) + |c_2|^2 \chi_{\Delta}(E_2), \quad (1.10)$$

すなわち $d\mu_{\psi} = |c_1|^2 \delta(E - E_1) dE + |c_2|^2 \delta(E - E_2) dE$ 。一次元では $E = p^2/(2m)$ に $p = \pm \sqrt{2mE}$ の二枝があり、

$$\frac{d\mu_{\psi}}{dE} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} \left(|\psi(\sqrt{2mE})|^2 + |\psi(-\sqrt{2mE})|^2 \right). \quad (1.11)$$

二枝がエネルギー fiber の multiplicity 2 を表す。

I.7 resolvent の解析性

問題

resolvent 恒等式から $\mathcal{R}(z)$ の作用素ノルム解析性を示せ。

解答

直接乗算して

$$\mathcal{R}(z) - \mathcal{R}(w) = (w - z) \mathcal{R}(z) \mathcal{R}(w) \quad (1.12)$$

を得る。 $|h| \|\mathcal{R}(z)\| < 1$ なら

$$\mathcal{R}(z + h) = \mathcal{R}(z) [1 + h \mathcal{R}(z)]^{-1} = \mathcal{R}(z) - h \mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.13)$$

従って $\partial_z \mathcal{R}(z) = -\mathcal{R}(z)^2$ 。ただし連続スペクトル上では $z - H$ が有界逆を持たず、この局所級数の円板は切断を越えない。解析接続には重み付き空間、解析 vector、Jost 表現など追加構造が要る。

I.8 Feshbach 作用素と微分 metric

問題

$P + Q = \mathbf{1}$ を用いて有効 Hamiltonian と極の規格化因子を導け。

解答

$(E - H)\Psi = 0$ を P, Q で射影すると

$$(E - H_{PP})P\Psi - H_{PQ}Q\Psi = 0, \quad (1.14)$$

$$-H_{QP}P\Psi + (E - H_{QQ})Q\Psi = 0. \quad (1.15)$$

$E - H_{QQ}$ が可逆なシートでは $Q\Psi = (E - H_{QQ})^{-1}H_{QP}P\Psi$ 。従って

$$[E - H_{\text{eff}}(E)]P\Psi = 0, \quad H_{\text{eff}}(E) = H_{PP} + H_{PQ}(E - H_{QQ})^{-1}H_{QP}. \quad (1.16)$$

$D(E) = E - H_{\text{eff}}(E)$ の単純零点 E_R 近傍で、右・左零 vector $|r\rangle, \langle l|$ を用いると

$$D(E)^{-1} \sim \frac{|r\rangle\langle l|}{(E - E_R)\langle l|[1 - \partial_E H_{\text{eff}}(E_R)]|r\rangle}. \quad (1.17)$$

分母の微分 metric は、消去した Q 空間成分のエネルギー依存を含めた全状態の規格化である。

I.9 閾値付き Lorentzian の生存振幅

問題

下端閾値を持つ Lorentzian 密度の Fourier 積分を極項と閾値項に分けよ。

解答

例として

$$\rho(E) = \Theta(E - E_{\text{th}}) \frac{\Gamma/(2\pi)}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (1.18)$$

$$A(t) = \int_{E_{\text{th}}}^{\infty} \rho(E) e^{-iEt/\hbar} dE. \quad (1.19)$$

を取る。 $t > 0$ で下半平面へ閉じると $E_R = E_0 - i\Gamma/2$ の留数が $Ze^{-iE_R t/\hbar}$ を与える。閾値から延びる輪郭は端点 積分であり、部分積分により

$$A_{\text{th}}(t) = \frac{\hbar \rho(E_{\text{th}})}{it} e^{-iE_{\text{th}} t/\hbar} + \mathcal{O}(t^{-2}). \quad (1.20)$$

密度が $(E - E_{\text{th}})^\alpha$ で始まれば $A_{\text{th}} \sim t^{-\alpha-1} e^{-iE_{\text{th}} t/\hbar}$ 。従って 中間時間は指数減衰、十分長時間は閾値由来の冪減衰となる。

I.10 四つの収束位相**問題**

ノルム、強作用素、弱作用素、強 resolvent 収束の例を一つずつ挙げよ。

解答

次が典型例である。

- (a) $A_n = \mathbf{1}/n \rightarrow 0$ は作用素ノルム収束。
- (b) ℓ^2 の最初の n 成分への射影 $P_n \rightarrow \mathbf{1}$ は強収束 だが $\|\mathbf{1} - P_n\| = 1$ 。
- (c) 片側 shift $S^n \rightarrow 0$ は弱作用素収束だが $\|S^n e_1\| = 1$ なので強収束しない。
- (d) $L^2(\mathbb{R})$ 上の乗算作用素 $H_n(x) = \max(-n, \min(x, n))$ は H_n 自身について一様有界ではないが、任意の $z \notin \mathbb{R}$ で $(z - H_n)^{-1} \rightarrow (z - x)^{-1}$ が優収束定理により強収束する。

強収束をノルム収束と誤れば有限 detector での収束から全状態一様誤差を主張してしまう。弱収束を強収束と誤れば逃散する確率

を消失とみなし、強 resolvent 収束を作用素収束と誤れば非有界 observable の domain 情報を失う。

I.11 compact 作用素への強収束の一様化

問題

$P_N \rightarrow \mathbf{1}$ strongly、 K compact なら $\|(\mathbf{1} - P_N)K\| \rightarrow 0$ を示せ。

解答

K が単位球を写した集合の閉包は compact なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の点 $y_1, \dots, y_m$ の ε 球で覆える。 P_N は一様有界であり、有限個の y_j について $\max_j \|(\mathbf{1} - P_N)y_j\| \rightarrow 0$ 。任意の $\|x\| \leq 1$ に対し $\|Kx - y_j\| < \varepsilon$ なる j を選べば

$$\|(\mathbf{1} - P_N)Kx\| \leq \|\mathbf{1} - P_N\|\varepsilon + \max_j \|(\mathbf{1} - P_N)y_j\|. \quad (1.21)$$

上限を取り $N \rightarrow \infty$ 、次に $\varepsilon \rightarrow 0$ とする。 $K = \mathbf{1}$ なら $\|\mathbf{1} - P_N\| = 1$ で反例になる。

I.12 自由 Green kernel の Hilbert–Schmidt 性

問題

三次元の off-shell 自由 Green kernel と有界 compact support potential から作る Birman–Schwinger kernel の二乗可積分性を示せ。

解答

$z = k^2/(2\mu)$ 、 $\text{Im } k > 0$ とし、定数を除けば

$$G_0(z; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad K = |V|^{1/2} G_0 \text{sgn}(V) |V|^{1/2}. \quad (1.22)$$

対角 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \downarrow 0$ では $|G_0|^2 \sim r^{-2}$ だが体積要素は $4\pi r^2 dr$ なので局所積分は $\int_0^\epsilon dr < \infty$ 。 V の台が compact なら両変数は有界領域

に制限され、残りは連続で有限である。台を緩めても $\text{Im } k > 0$ なら $e^{-2 \text{Im } k r}$ が大距離を抑える。従って K は Hilbert-Schmidt、特に compact である。

I.13 Birman-Schwinger の符号

問題

本書の resolvent 規約で Birman-Schwinger 同値を証明し、逆規約との符号差を示せ。

解答

$(H_0 + V - z)\psi = 0$ は $(z - H_0)\psi = V\psi$ 、従って $\psi = \mathcal{R}_0(z)V\psi$ と同値である。極分解 $V = |V|^{1/2}J|V|^{1/2}$ を用い $\phi = |V|^{1/2}\psi$ と置けば

$$\phi = K(z)\phi, \quad K(z) = |V|^{1/2}\mathcal{R}_0(z)J|V|^{1/2}. \quad (1.23)$$

逆向きは $\psi = \mathcal{R}_0J|V|^{1/2}\phi$ と構成する。 $\tilde{R}_0 = (H_0 - z)^{-1} = -\mathcal{R}_0$ を採用すれば $\phi = -\tilde{K}(z)\phi$ 、すなわち固有値条件は $-1 \in \sigma(\tilde{K})$ になる。

I.14 解析 Fredholm 逆の留数

問題

$A(z) = \mathbf{1} - K(z)$ の単純零点における $A(z)^{-1}$ の Laurent 係数を求めよ。

解答

$A(z_0)|r\rangle = 0$ 、 $\langle l|A(z_0) = 0$ 、 $d = \langle l|A'(z_0)|r\rangle \neq 0$ とする。Ansatz $A^{-1} = (z - z_0)^{-1}B_{-1} + B_0 + \cdots$ を $AA^{-1} = \mathbf{1}$ に代入すると $A(z_0)B_{-1} = 0$ なので $B_{-1} = c|r\rangle\langle l|$ 。定数項を左から $\langle l|$ で挟むと $cd\langle l| = \langle l|$ 、従って

$$A(z)^{-1} = \frac{|r\rangle\langle l|}{(z - z_0)\langle l|A'(z_0)|r\rangle} + \mathcal{O}(1). \quad (1.24)$$

$|r\rangle \mapsto c|r\rangle$ 、 $\langle l| \mapsto c^{-1}\langle l|$ では分子・分母とも不変である。

I.15 乗算作用素は compact でない

問題

$L^2([0, 1], dE)$ 上の非零乗算作用素が compact でないことを示せ。

解答

$f \neq 0$ a.e. でないなら、ある $\varepsilon > 0$ に対し $A = \{|f| \geq \varepsilon\}$ が正測度を持つ。 A を互いに素な正測度集合 A_n に分け、 $e_n = \chi_{A_n} / \sqrt{\mu(A_n)}$ とする。 e_n は正規直交し、 $M_f e_n$ の台も互いに素で $\|M_f e_n\| \geq \varepsilon$ 。従って像列は収束部分列を持たず、 M_f は compact でない。これに対し局在 Birman–Schwinger 作用素は積分 kernel により変数を混ぜて平滑化し、対角特異性も二乗可積分である。エネルギーごとの乗算と、座標間を結ぶ compact kernel は異なる作用素構造であり矛盾しない。

第2部

Stage II：散乱、Jost 関数、長距離相関

II.1 二体問題の分離

問題

二粒子の重心・相対運動を分離し、domain が tensor 積に分かれる仮定を述べよ。

解答

$M = m_1 + m_2$ 、 $\mu = m_1 m_2 / M$ 、 $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / M$ 、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と置く。共役運動量を $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ 、 $\mathbf{p} = (m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2) / M$ とすれば正準変換であり、

$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}. \quad (2.1)$$

$V = V(\mathbf{r})$ が並進不変で、相対 kinetic energy に関して相対 form 有界（相対 bound < 1 で十分）なら内部 Hamiltonian $h = \mathbf{p}^2 / (2\mu) + V$ は自己共役となり、 $H = H_{\text{cm}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes h$ を tensor 積 domain（厳密には閉 quadratic form の和）上に定義できる。外場、速度依存相互作用、重心に依存する境界条件があればこの分離は成立しない。

II.2 Lippmann–Schwinger 方程式の符号

問題

本書の resolvent と時間規約から outgoing Lippmann–Schwinger 方程式を導け。

解答

$(H_0 + V)|\psi^{(+)}\rangle = E|\psi^{(+)}\rangle$ より $(E - H_0)|\psi^{(+)}\rangle = V|\psi^{(+)}\rangle$ 。自由解を加え、limiting absorption を取ると

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \mathcal{R}_0(E + i0)V|\psi^{(+)}\rangle. \quad (2.2)$$

時間依存を $e^{-iEt/\hbar}$ としたので、 $+i0$ の kernel は

$$\mathcal{R}_0(E + i0; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (2.3)$$

すなわち outgoing wave である。 $(H_0 - E - i0)^{-1}$ を使う文献では resolvent 自体に負号が入る。

II.3 三次元自由 Green 関数と Born 振幅**問題**

自由 Green kernel を評価し、第一 Born 振幅を求めよ。

解答

Fourier 積分を角度積分し、 p 平面の pole を放射条件に従って閉じると

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.4)$$

$r \rightarrow \infty$ では $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \mathcal{O}(r^{-1})$ 。従って

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{ik_f r}}{r} f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i), \quad (2.5)$$

第一反復で

$$f_B(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} d^3r. \quad (2.6)$$

II.4 多 channel 断面積の flux

問題

確率流と k_f/k_i factor を導き、flux 規格化した S 行列を説明せよ。

解答

Schrödinger 方程式とその複素共役の差から

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2\mu i}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (2.7)$$

を得る。channel c の球面波 $A_c e^{ik_c r}/r$ の radial flux は $j_r = \hbar k_c |A_c|^2 / (\mu_c r^2)$ 。従って同じ平面波振幅規格化なら

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} = \frac{v_f}{v_i} |f_{fi}|^2 = \frac{k_f \mu_i}{k_i \mu_f} |f_{fi}|^2, \quad (2.8)$$

同じ reduced mass なら k_f/k_i 。一方、基底を $|c, E\rangle_{\text{flux}} = v_c^{-1/2} |c, k_c\rangle$ と規格化すれば速度因子は振幅に吸収され、on-shell $S(E)^{\text{dagger}} S(E) = \mathbf{1}$ は通常の行列積で書ける。

II.5 光学定理と吸収

問題

partial-wave unitarity から光学定理を示し、複素 optical potential の場合を論ぜよ。

解答

弾性一 channel で $S_l = e^{2i\delta_l}$ とすると

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos \theta). \quad (2.9)$$

直交性から $\sigma_{\text{el}} = (\pi/k^2) \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2$ 。 $|S_l| = 1$ を使えば

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0). \quad (2.10)$$

$V = V_R + iW$ 、 $W \leq 0$ では $|S_l| \leq 1$ となり、欠損 flux は

$$\sigma_{\text{reac}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 - |S_l|^2) = -\frac{2}{\hbar v} \int W(\mathbf{r}) |\psi^{(+)}|^2 d^3r \geq 0. \quad (2.11)$$

光学定理の全断面積は $\sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{reac}}$ である。

II.6 Jost 解による radial Green 関数

問題

regular 解と outgoing Jost 解から Green 関数を作り、単純零点の留数を求めよ。

解答

reduced radial 方程式を $[E - h_l]u = 0$ とし、origin で regular な $\varphi_l(k, r)$ と infinity で outgoing な $f_l^{(+)}(k, r)$ を取る。Wronskian $W_l(k) = W[\varphi_l, f_l^{(+)}]$ は r に依らない。微分 jump を合わせれば

$$G_l^{(+)}(r, r'; k) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{\varphi_l(k, r_{<}) f_l^{(+)}(k, r_{>})}{W_l(k)}. \quad (2.12)$$

規約により Jost 関数は W_l の非零定数倍である。 $W_l(k_R) = 0$ 、 $W'_l(k_R) \neq 0$ なら両解は同じ Gamow 解 u_R に比例し、

$$\text{Res}_{k=k_R} G_l^{(+)}(r, r'; k) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{u_R(r) u_R(r')}{W'_l(k_R)} \quad (2.13)$$

(比例定数は採用した Jost 規格化へ吸収) となる。

II.7 Coulomb 対数位相

問題

Coulomb potential を漸近直線軌道に沿って積分し、plane wave が不適切な理由を示せ。

解答

速度 v 、impact parameter b の直線 $r(t) = \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$ に沿う eikonal 位相は

$$\chi(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_{-T}^T \frac{g}{r(t)} dt = -\frac{g}{\hbar v} \operatorname{arsinh} \frac{vT}{b} = -\eta \log \frac{2vT}{b} + o(1). \quad (2.14)$$

位相は定数へ収束せず、radial Coulomb 波は $e^{i[kr - \eta \log(2kr) + \sigma_l]}$ を含む。従って plane wave を基準に差を有限定数として定義する通常の散乱振幅は存在しない。Coulomb 波を comparison state に取った振幅と plane-wave Born 振幅は同じ量ではない。

II.8 Dollard modifier

問題

通常の Møller 極限が Coulomb 位相で失敗することを示し、modifier を構成せよ。

解答

free trajectory 上の相互作用表示の積分は $\int_{-t}^t g/(v|s|) ds = (g/v) \operatorname{sgn}(t) \log |t| + O(1)$ 。従って $e^{iHt/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar}$ は対数的に回転し続け、強極限を持たない。運動量表示で $v(p) = p/\mu$ とし

$$U_D(t) = e^{-iH_0 t/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{g}{v(p)} \operatorname{sgn}(t) \log |t|} \quad (2.15)$$

を comparison dynamics とする。修正 wave operator $\Omega_D^{(\pm)} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt/\hbar} U_D(t)$ では発散位相が相殺される。有限定数や reference time の違いは asymptotic state の位相規約である。

II.9 三荷電粒子の漸近領域

問題

三つの cluster 漸近領域を列挙し、pairwise Coulomb 位相が一樣でない理由を述べよ。

解答

Jacobi 座標 (x_α, y_α) に対し、(i) 粒子1と2が有限距離で cluster を作り粒子3が遠い領域、(ii) 2と3が cluster、(iii) 3と1が cluster、に加え三距離が同時に大きい genuine three-body breakup 領域がある。各 cluster 領域では大変数は spectator 座標 y_α 、内部座標 x_α は有限である。一方 breakup では hyperradius $\rho = (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)^{1/2}$ が大きく hyperangle も動く。各 pair の $\eta_{ij} \log r_{ij}$ を単純に足した形は、cluster 境界で r_{ij} の大小が入れ替わると誤差の次数が一樣でなく、overlap 領域の 相関振幅と三体位相を決めない。これが一つの elementary “Coulomb plane wave” が知られていない核心である。

II.10 soft-photon coherent dressing

問題

coherent profile $f(\mathbf{k})$ が Fock vector を与える条件を求め、Coulomb field と比較せよ。

解答

coherent state $|f\rangle = e^{-\|f\|^2/2} e^{a^\dagger(f)} |0\rangle$ が Fock 空間に属する必要十分条件は

$$\|f\|^2 = \sum_{\lambda} \int |f_{\lambda}(\mathbf{k})|^2 d^3k < \infty. \quad (2.16)$$

charged particle の long-range field を再現する dressing は soft limit で $f(\mathbf{k}) \sim |\mathbf{k}|^{-3/2}$ (角度因子を除く) を持つので $\|f\|^2 \sim \int_0^\Lambda k^2 k^{-3} dk = \text{int}_0^\Lambda dk/k$ と対数発散する。従って物理的 charged sector は真空 Fock 表現と unitary 同値でなく、有限 soft cutoff を外す順序を指定しなければならない。

II.11 Lagrange 恒等式

問題

一般 Sturm-Liouville 表式の Lagrange 恒等式と endpoint bracket を示せ。

解答

$\tau u = w^{-1}[-(pu')' + qu]$ とし $[u, v] = p(u^*v' - u'^*v)$ と定める。積の微分を展開すると

$$\int_a^b \{u^*(\tau v) - (\tau u)^*v\}w \, dx = [u, v](b) - [u, v](a). \quad (2.17)$$

regular endpoint a の separated 条件を $\cos \alpha u(a) + \sin \alpha p(a)u'(a) = 0$ と書く。同じ α を満たす二関数の境界 data は同じ一次元部分空間に属するため、その symplectic determinant $[u, v](a)$ は0である。

II.12 逆二乗 potential の limit-point 閾値

問題

$-u'' + gu/r^2 = 0$ の Frobenius 指数を求めよ。

解答

$u \sim r^\nu$ を代入すると $\nu(\nu - 1) = g$ 、従って

$$\nu_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4g}}{2}. \quad (2.18)$$

$\int_0^\epsilon r^{2\nu} \, dr < \infty$ は $\nu > -1/2$ と同値。 ν_+ は常に可積分で、 ν_- も可積分なのは $\sqrt{1 + 4g} < 2$ 、すなわち $g < 3/4$ 。従って $g \geq 3/4$ では origin は limit point、 $g < 3/4$ では（下方有界性 $g > -1/4$ の範囲で） limit circle で境界条件が必要。三次元 physical s wave は $g = 0$ だが元の波動関数 $R = u/r$ の正則性を課し Friedrichs 条件 $u(0) = 0$ を選ぶ。

II.13 Sturm–Liouville Green kernel の jump

問題

Green kernel の符号と規格化を jump 条件から決めよ。

解答

u_a を左境界条件、 u_b を右境界条件を満たす解とし、 $W_p = p(u_a u'_b - u'_a u_b)$ とする。 $(z - L)G = \delta/w$ の規約では

$$G(x, x'; z) = -\frac{u_a(x_{<})u_b(x_{>})}{W_p(z)} \quad (2.19)$$

$(L = w^{-1}[-(p\partial_x)' + q])$ となる。実際、 $x = x'$ をまたいで積分すると $p[G'_+ - G'_-] = -1$ であり、上式の jump がこれに一致する。 $(L - z)^{-1}$ を resolvent とすれば右辺の delta と jump の符号が逆転し、kernel 全体に負号が付く。

II.14 球形井戸の Jost 関数

問題

matching により Jost 関数と resonance 条件を求め、bound-state zero を閾値まで追跡せよ。

解答

$U = -U_0$ for $r < a$ 、 $U = 0$ for $r > a$ とし $q = (k^2 + U_0)^{1/2}$ 。regular 解は $\varphi = \sin(qr)/q$ 。外側を $Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$ とし $r = a$ で値と微分を合わせると

$$2Be^{-ika} = \frac{\sin qa}{q} + \frac{i}{k} \cos qa, \quad (2.20)$$

$$2Ae^{ika} = \frac{\sin qa}{q} - \frac{i}{k} \cos qa. \quad (2.21)$$

従って一つの規格化は

$$F(k) = e^{ika} \left(\cos qa - i \frac{k}{q} \sin qa \right), \quad B = 0 \iff q \cot qa = ik. \quad (2.22)$$

bound state は $k = i\kappa$ 、 $\kappa > 0$ なので $q \cot qa = -\kappa$ 。 U_0 を下げると最上位の κ は 0 へ近づき、 $k = 0$ で scattering length が発散する。その後零点は負虚軸の非物理 sheet へ移り virtual state となる。数値追跡では q の branch を連続に保つ。

II.15 Wronskian 微分と Gamow 規格化

問題

radial 方程式を k で微分して積分恒等式を導け。

解答

$[-\partial_r^2 + U(r) - k^2]u(k, r) = 0$ を k で微分すると

$$[-\partial_r^2 + U - k^2]\partial_k u = 2ku. \quad (2.23)$$

元の式を $\partial_k u$ 倍したものとの差を $[0, R]$ で積分して

$$2k \int_0^R u(k, r)^2 dr = W[u, \partial_k u](R) - W[u, \partial_k u](0) \quad (2.24)$$

を得る。複素共役は取らない。regular 規格化なら origin 項は既知で、bound state では infinity の減衰により $R \rightarrow \infty$ の境界項が消える。Gamow state では実軸上で発散するため、 k と輪郭を bound-state 領域から同じ解析枝で続けるか、Gaussian damping 後に解析接続する。得られる有限値は Jost 関数の $F'(k_R)$ と同じ留数規格化である。

第3部

Stage III : exact WKB と大域接続

III.1 Riccati 係数

問題

対数 WKB ansatz を代入し最初の4係数と枝の parity を求めよ。

解答

$[-\hbar^2 \partial_x^2 + Q(x)]\psi = 0$ に $\psi = e^{\hbar^{-1} \int^x S(x', \hbar) dx'}$ を代入すると

$$S^2 + \hbar S' = Q, \quad S = \sum_{n \geq 0} \hbar^n S_n. \quad (3.1)$$

従って $S_0^2 = Q$ と

$$S_n = -\frac{1}{2S_0} \left(S'_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} S_j S_{n-j} \right) \quad (3.2)$$

を得る。 $S_0^\pm = \pm \sqrt{Q}$ とすれば

$$S_1 = -\frac{Q'}{4Q}, \quad (3.3)$$

$$S_2^\pm = \pm \left(\frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{5(Q')^2}{32Q^{5/2}} \right), \quad (3.4)$$

$$S_3 = -\frac{Q'''}{16Q^2} + \frac{9Q'Q''}{32Q^3} - \frac{15(Q')^3}{64Q^4}. \quad (3.5)$$

sheet 交換で S_{2j} は符号を変え、 S_{2j+1} は不変。 $S_{\text{odd}} = (S^+ - S^-)/2$ が偶数次数、 $S_{\text{even}} = (S^+ + S^-)/2$ が奇数次数を含み、 $S_{\text{even}} = -(\hbar/2) \partial_x \log S_{\text{odd}}$ である。

III.2 最も単純な lateral Borel 和

問題

$\sum_{n \geq 0} n! \hbar^{n+1}$ の Borel 変換、二つの lateral 和、差を求めよ。

解答

Borel 変換は

$$\widehat{F}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n!} t^n = \frac{1}{1-t}. \quad (3.6)$$

正実軸上の $t = 1$ に pole があるので

$$S_{0\pm} F(\hbar) = \int_0^{\infty e^{\pm i0}} \frac{e^{-t/\hbar}}{1-t} dt \quad (3.7)$$

と処方する。実部は principal value、虚部は半留数である。上側 minus 下側を本問の規約とすれば

$$S_{0+} F - S_{0-} F = 2\pi i e^{-1/\hbar}. \quad (3.8)$$

符号は lateral path の命名を逆にすれば反転するが、ambiguity の大きさと action $A = 1$ は不変である。

III.3 単純 turning point と Airy 接続

問題

単純 turning point を Airy 方程式へ写し、局所接続行列を求めよ。

解答

$Q(x_0) = 0$ 、 $Q'(x_0) \neq 0$ とし

$$\zeta(x) = \left[\frac{3}{2} \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right]^{2/3}, \quad \psi = (\zeta/Q)^{1/4} w \quad (3.9)$$

と置く。leading order では $\hbar^2 w_{\zeta\zeta} = \zeta w$ 、解は $\text{Ai}(\zeta/\hbar^{2/3})$ と Bi である。dominant/subdominant の係数列を $(a_{\text{dom}}, a_{\text{sub}})^T$ とし、

Stokes 線を正向きに横切る規約では dominant 係数は不変で sub-dominant 係数が $\pm i$ 倍だけ跳ぶ：

$$\begin{pmatrix} a_{\text{dom}} \\ a_{\text{sub}} \end{pmatrix}_{\text{after}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\text{dom}} \\ a_{\text{sub}} \end{pmatrix}_{\text{before}}. \quad (3.10)$$

符号は $\sqrt{Q}$ の sheet と横断方向で決まる。ordering を (sub,dom) に変えれば転置位置へ移る。いずれも determinant 1 で Wronskian を保存する。

III.4 Stokes 行列の path ordering

問題

三つの triangular Stokes 行列と propagation 行列を掛け、非可換性を示せ。

解答

$$U(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad P(p) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

とする。各 determinant は1なので、任意の path-ordered product も determinant 1 で Wronskian を保存する。しかし

$$U(a)L(b) = \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad L(b)U(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1+ab \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

また $PUP^{-1} = U(p^2a)$ である。従って、例えば $U(a_3)L(a_2)P(p)U(a_1)$ は横断順序を入れ替えた積と異なる。determinant だけでは順序誤りを検出できないため、各 crossing の sheet、向き、basis ordering を ledger に記録する必要がある。

III.5 barrier resonance と Gamow 幅

問題

二 turning point barrier の leading outgoing 条件と幅を導け。

解答

classically allowed well の一周期 action を $I(E)$ 、escape barrier の Euclidean action を $K(E) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V-E)} dx > 0$ とする。Airy 接続を一周 掛けると、leading real quantization は

$$I(E_n) = 2\pi\hbar(n + 1/2). \quad (3.13)$$

barrier の小さい transmission probability は $T(E) = e^{-2K(E)/\hbar}$ 。classical period $T_{\text{cl}} = \partial I / \partial E$ ごとに一回 escape を試みるなら decay rate は $T(E_n)/T_{\text{cl}}$ 、従って

$$\Gamma_n = \frac{\hbar}{T_{\text{cl}}(E_n)} e^{-2K(E_n)/\hbar} \quad (3.14)$$

(左右二出口なら各寄与を加える)。all-order exact WKB では K を Borel resummed open Voros period、 I を closed quantum period に置き換え、Stokes multiplier も含む $\mathcal{C}_{\text{in}}(E) = 0$ を解く。

III.6 inverted Rosen–Morse の pole

問題

hypergeometric 接続から incoming 係数と共鳴・反共鳴枝を求めよ。

解答

$V = U_0 / \cosh^2(\beta x)$ 、 $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ 、 $s(s+1) = -2mU_0 / (\beta^2 \hbar^2)$ とする。 $\xi = \tanh \beta x$ により associated Legendre 方程式となり、 $x \rightarrow +\infty$ で outgoing な解を $x \rightarrow -\infty$ へ接続すると、非零

位相を除き

$$A_{\text{in}}(k) = \frac{\Gamma(1 - ik/\beta)\Gamma(-ik/\beta)}{\Gamma(-ik/\beta - s)\Gamma(-ik/\beta + s + 1)}. \quad (3.15)$$

Gamma 関数は零を持たないので、分母の pole が $A_{\text{in}} = 0$ を与える。 $\kappa = [8mU_0/(\beta^2\hbar^2) - 1]^{1/2}$ とすれば resonance branch は

$$k_n^{\text{R}} = \frac{\beta}{2}[\kappa - i(2n + 1)], \quad E_n^{\text{R}} = \frac{\hbar^2\beta^2}{8m}[\kappa - i(2n + 1)]^2. \quad (3.16)$$

real potential の反共鳴は $k_n^{\text{AR}} = -(k_n^{\text{R}})^*$ 。どちらも同じ解析式の別 sheet である。

III.7 単純零点と二重零点の Laurent 展開

問題

$S(E) = N(E)/C_{\text{in}}(E)$ を単純零点と二重零点の周りで展開せよ。

解答

$x = E - E_*$ とする。単純零点 $C_{\text{in}} = c_1x + c_2x^2/2 + \dots$ 、 $N = N_0 + N_1x + \dots$ なら

$$S(E) = \frac{N_0}{c_1} \frac{1}{x} + \left(\frac{N_1}{c_1} - \frac{N_0c_2}{2c_1^2} \right) + \mathcal{O}(x). \quad (3.17)$$

二重零点 $C_{\text{in}} = c_2x^2/2 + c_3x^3/6 + \dots$ なら

$$S(E) = \frac{2N_0}{c_2} \frac{1}{x^2} + \left(\frac{2N_1}{c_2} - \frac{2N_0c_3}{3c_2^2} \right) \frac{1}{x} + \mathcal{O}(1). \quad (3.18)$$

Stage VII の Jordan resolvent の x^{-2} 項と x^{-1} 項がこの二係数に対応する。ただし行列問題では determinant だけでなく左右 null vector を含む residue を計算する。

III.8 cubic metastable potential の Stokes graph

問題

二枚の $\sqrt{Q}$ sheet 上で Stokes graph と outgoing path を構成せよ。

解答

例 $Q(x, E) = x^2 - gx^3 - 2E$ の三つの turning point x_j を求め、各点から

$$\operatorname{Im} \int_{x_j}^x \sqrt{Q(t, E)} dt = 0 \quad (3.19)$$

を満たす三本の Stokes 曲線を数値積分する。branch cut を turning point 間に置き、sheet + では $S_0 = +\sqrt{Q}$ 、cut 横断後は sheet - と記録する。origin 側の regular/subdominant 解から metastable well を通り、barrier turning points の Airy 行列、cut 交換、外側の Stokes jump を順に掛け、外側で incoming 係数を 0 にする path を選ぶ。正解の検査は (i) 各 crossing の順序が連続、(ii) branch 交換が偶数回なら元 sheet、(iii) 総行列 determinant が 1、(iv) contour の小変形で c_{in} が不変、の四点である。図の見た目だけで sheet を判定してはならない。

III.9 analytic coordinate rotation と Voros period

問題

turning points、cycle、積分路を同時に回転したとき quantum period が不変であることを示せ。

解答

$x = e^{i\theta} y$ と同時に potential parameter と turning points を解析的に移し、cycle γ を γ_θ へ写す。Riccati 1-form は座標変換則により

$$S_x(x, E; \hbar) dx = S_y(y, E; \hbar) dy + ddF \quad (3.20)$$

となる。closed cycle では exact differential の積分は0なので

$$V_\gamma = \oint_{\gamma_\theta} S_{\text{odd}} dx = \oint_{\gamma_\theta} S_{\text{odd},\theta} dy. \quad (3.21)$$

open path でも endpoint 規格化を同時に変換すれば同じである。変形領域を pole、turning point、branch cut、Borel singular direction が横切ると homotopy class または lateral sum が変わり、留数あるいは Stokes automorphism を追加しなければならない。

III.10 piecewise constant barrier の transfer matrix

問題

transfer-matrix pole と WKB 接続条件を比較せよ。

解答

区間 j の波を $A_j e^{ik_j x} + B_j e^{-ik_j x}$ と書く。幅 d_j の propagation と境界 matching は

$$P_j = \begin{pmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{pmatrix}, \quad I_{j,j+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + k_j/k_{j+1} & 1 - k_j/k_{j+1} \\ 1 - k_j/k_{j+1} & 1 + k_j/k_{j+1} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

$M = I_{N,N+1} P_N \cdots P_1 I_{0,1}$ を path order で作る。左右とも outgoing の条件を課すと、採用した係数順序に応じて $M_{22}(E) = 0$ (または等価な minor) が pole 条件である。電流規格化した interface 行列では $\det M = 1$ となり、 $|\det M - 1|$ を丸め誤差 monitor にする。smooth barrier の区間数を増やすと、 $\log P_j$ の和は WKB propagation action へ、interface 行列は turning-point connection へ収束する。pole の比較は同じ k_j branch と outgoing convention で行う。

第4部

Stage IV : pole の諸実現と continuum response

IV.1 flat continuum の Feshbach 自己 energy

問題

rank-one P state と有限閾値を持つ flat continuum の自己 energy を求めよ。

解答

$H_{PP} = E_d$ 、 $\rho|g|^2 = c$ を $E_{\text{th}} < \epsilon < E_c$ で一定とする。本書の規約では

$$\Sigma(z) = c \int_{E_{\text{th}}}^{E_c} \frac{d\epsilon}{z - \epsilon} = c \log \frac{z - E_{\text{th}}}{z - E_c}. \quad (4.1)$$

物理上縁 $z = E + i0$ 、 $E_{\text{th}} < E < E_c$ では

$$\Sigma(E + i0) = c \text{PV} \log \left| \frac{E - E_{\text{th}}}{E - E_c} \right| - i\pi c. \quad (4.2)$$

実部が level shift、 $-2 \text{Im} \Sigma = 2\pi c$ が幅である。共鳴 pole は $z - E_d - \Sigma^{\text{II}}(z) = 0$ を second sheet で解く。cutoff を外すなら実部の発散を E_d に吸収する renormalization 条件が必要である。

IV.2 実 dilation から complex scaling へ

問題

dilation の x, p, T への作用を導き、解析接続せよ。

解答

一次元で $(U(s)\psi)(x) = e^{s/2}\psi(e^s x)$ 、 $s \in \mathbb{R}$ とすると $U(s)$ は unitary で

$$U(s)xU(s)^{-1} = e^s x, \quad (4.3)$$

$$U(s)pU(s)^{-1} = e^{-s} p, \quad (4.4)$$

$$U(s)TU(s)^{-1} = e^{-2s} T. \quad (4.5)$$

$s = i\theta$ へ解析接続すれば

$$H_\theta = U(i\theta)HU(i\theta)^{-1} = e^{-2i\theta}T + V(e^{i\theta}x). \quad (4.6)$$

これは一般には unitary 同値でなく非自己共役である。 V の dilation analyticity wedge の内側でのみこの式を作用素族として使える。

IV.3 outgoing wave の square integrability と cut の回転

問題

e^{ikr} 、 $\text{Im } k < 0$ が complex scaling 後に可積分となる角度を求めよ。

解答

$k = |k|e^{-i\phi}$ 、 $0 < \phi < \pi/2$ と書く。 $r \mapsto re^{i\theta}$ 後の絶対値は

$$\left| e^{ikre^{i\theta}} \right| = e^{-|k|r \sin(\theta-\phi)}. \quad (4.7)$$

従って $\theta > \phi$ 、かつ potential の解析 wedge 内なら L^2 。 $E \propto k^2$ なので共鳴の偏角は $\arg E_R = -2\phi$ 、free continuum は $e^{-2i\theta}[0, \infty)$ へ回転する。pole が cut の上側に露出する条件は $-2\theta < \arg E_R < 0$ である。

IV.4 free essential spectrum と ABC の compact step

問題

運動量空間で free spectrum の回転を示し、relative compact perturbation を説明せよ。

解答

Fourier 表示で

$$(H_{0,\theta}\widehat{\psi})(\mathbf{p}) = e^{-2i\theta} \frac{p^2}{2m} \widehat{\psi}(\mathbf{p}). \quad (4.8)$$

従って乗算作用素の essential range から $\sigma(H_{0,\theta}) = e^{-2i\theta}[0, \infty)$ 。さらに $V_\theta(H_{0,\theta} - z)^{-1}$ が compact (または V_θ が $H_{0,\theta}$ -relative compact) なら Weyl 型安定性により essential spectrum は変わらない。解析 Fredholm 定理は $1 - V_\theta \mathcal{R}_{0,\theta}(z)$ の逆を meromorphic にし、回転 cut の外に離散固有値として共鳴を与える。

IV.5 Berggren–Zel’dovich Gaussian continuation

問題

$u(r) \sim e^{ikr}$ の Gaussian regularized integral を解析接続せよ。

解答

基本積分を $q = k + k'$ として

$$I_\epsilon(q) = \int_0^\infty e^{-\epsilon r^2 + iqr} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\epsilon}} e^{-q^2/(4\epsilon)} \operatorname{erfc}\left(-\frac{iq}{2\sqrt{\epsilon}}\right) \quad (4.9)$$

と評価する。まず $\operatorname{Im} q > 0$ では $\epsilon \downarrow 0$ を通常の意味で取り $I_0(q) = i/q$ 。右辺は q の解析関数なので、Stokes sector を指定して resonance quadrant へ続ける。この continued value を $\int u_k u_{k'} dr$ の外側寄与に用いる。 $q = 0$ の distributional continuum 規格化と、 $\operatorname{Im} q < 0$ の Gamow 規格化を同じ極限順序で混同してはならない。

IV.6 Gamow functional の test-space continuity

問題

contour deformation 後に Gamow functional が連続となる test space を選べ。

解答

通常の Schwartz 空間だけでは指数成長を polynomial seminorm で抑えられない。そこで Schwartz 空間の核部分空間

$$\Phi = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+) : p_{a,m,n}(\phi) = \sup_{r \geq 0} |e^{ar} r^m \partial_r^n \phi(r)| < \infty, \quad (4.10)$$

for all a, m, n .

に countable locally convex topology を入れる。ある admissible ray $r = e^{i\theta}s$ 上で Gamow 解が減衰するなら

$$\langle u_R^\times, \phi \rangle = \int_0^{\infty e^{i\theta}} u_R(r) \phi(r) dr \quad (4.11)$$

は $|\langle u_R^\times, \phi \rangle| \leq C p_{a,0,0}(\phi)$ と評価でき連続。Hilbert norm $\|\phi\|_2$ だけでは局所的に同じ norm を持ちながら tail を 遠方へ移した列を制御できず、この評価が失敗する。

IV.7 continuum level density と散乱位相

問題

resolvent 差の trace から level density を導き、位相との関係を示せ。

解答

$\mathcal{R} = (z - H)^{-1}$ の規約で spectral density は $-\pi^{-1} \text{Im } \mathcal{R}(E + i0)$ 。従って

$$\Delta(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im Tr}[\mathcal{R}(E + i0) - \mathcal{R}_0(E + i0)]. \quad (4.12)$$

resolvent 差が trace class なら spectral shift function $\xi(E)$ が存在し $\Delta(E) = \xi'(E)$ 。Birman–Krein 公式 $\det S(E) = e^{-2\pi i \xi(E)}$ と $\det S = e^{2i\delta_{\text{tot}}}$ の位相規約を揃えると

$$\Delta(E) = \frac{1}{\pi} \frac{d\delta_{\text{tot}}}{dE} \quad (4.13)$$

(ξ の符号規約を逆にすれば両式とも反転)。積分は端点の全位相変化、すなわち束縛状態数と threshold correction を含む。

IV.8 有限基底の複素固有値の分類

問題

三つの scaling angle の固有値から bound、resonance、rotated continuum を色なしで分類せよ。

解答

各 θ_j で generalized eigenproblem $H_{\theta_j} c = E N c$ を同じ精度で解く。固有値を nearest-neighbor ではなく左右固有vector overlap と連続 assignment で対応付ける。

- (a) E が実軸上で θ と基底に不変、かつ projector norm が安定 : bound state。
- (b) $\text{Im } E < 0$ で $|dE/d\theta|$ が誤差以下、左右 residue も安定 : resonance。
- (c) $\arg E \simeq -2\theta$ 、角度差に対し $E(\theta_2) \simeq e^{-2i(\theta_2 - \theta_1)} E(\theta_1)$: continuum pseudostate。

距離だけでなく θ trajectory、residual norm、condition number、basis 拡大時の projector overlap を表にして判定する。

IV.9 complex-symmetric 行列の c product

問題

c product と通常の biorthogonality を比較し、Hermitian conjugation の失敗例を示せ。

解答

$H^\top = H$ なら右固有vector $Hr_n = E_nr_n$ に対する左 vector は $r_n^\top$ であり

$$(r_m|r_n)_c = r_m^\top r_n, \quad (E_n - E_m)r_m^\top r_n = 0. \quad (4.14)$$

例として $H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ は $H^2 = 0$ の二次 EP で、零固有vector $r = (-i, 1)^\top$ は $r^\top r = 0$ だが $r^\dagger r = 2$ 。Hermitian norm を使うと EP の self-orthogonality を見失い、resolvent residue の分母 $l^\top H' r$ を $r^\dagger H' r$ に誤置換して pole 強度を誤る。

IV.10 三つの regularization の同値性

問題

Zel'dovich damping、complex rotation、rigged-space pairing が同じ resonance norm を与える理由を説明せよ。

解答

まず bound-state 領域 $\text{Im } k > 0$ で $I(k) = \int_0^\infty u_k(r)^2 dr$ を定義する。この領域では (i) Gaussian factor を入れてから外す、(ii) 積分 ray を $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ へ回す、(iii) analytic test function との pairing として読む、の三者は Cauchy 変形で同じである。次に integrand、endpoint、Jost derivative を同じ branch のまま resonance k_R へ解析接続する。変形 wedge 内に singularity が入らなければ値は一意で

$$I_R \propto F'(k_R) \quad (4.15)$$

となる。三者は発散実積分を直接等置するのではなく、収束領域で一致する一つの解析関数の境界値として一致する。

IV.11 pole residue の微分公式

問題

$D(z) = z - E_d - \Sigma(z)$ の単純零点を展開し、 Z_R が確率でないことを示せ。

解答

$D(z_R) = 0$ 、 $D'(z_R) = 1 - \Sigma'(z_R) \neq 0$ だから

$$\frac{1}{D(z)} = \frac{Z_R}{z - z_R} + \mathcal{O}(1), \quad Z_R = [1 - \Sigma'(z_R)]^{-1}. \quad (4.16)$$

continued sheet では Σ' は複素数である。局所例 $\Sigma(z) = (1 + i)z + b$ なら $Z_R = 1/[-i] = i$ 。従って Z_R は一般に実数でも $[0, 1]$ 内でもなく、pole residue または biorthogonal wave-function renormalization であって Born probability ではない。

IV.12 Breit–Wigner 位相と time delay

問題

unitary pole factor から Lorentzian 位相微分と peak time delay を求めよ。

解答

$z_R = E_R - i\Gamma/2$ とし

$$S_{\text{pole}}(E) = \frac{E - z_R^*}{E - z_R} = e^{2i\delta_R(E)}. \quad (4.17)$$

logarithm を微分すると

$$\frac{d\delta_R}{dE} = \frac{\Gamma/2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (4.18)$$

Wigner–Smith delay は $\tau = 2\hbar d\delta/dE$ なので

$$\tau_R(E) = \frac{\hbar\Gamma}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad \tau_R(E_R) = \frac{4\hbar}{\Gamma}. \quad (4.19)$$

background 位相が急変すれば観測 delay はこの単純項との和になる。

IV.13 Fano line shape

問題

定数 coherent background と単純 pole を加え、maximum と zero を求めよ。

解答

位相と全体規格化を吸収すると振幅は $A(\epsilon) = A_0(q + \epsilon)/(\epsilon + i)$ 、 $\epsilon = 2(E - E_R)/\Gamma$ と書ける。従って

$$\frac{|A|^2}{|A_0|^2} = \frac{|q + \epsilon|^2}{1 + \epsilon^2}. \quad (4.20)$$

real q なら zero は $\epsilon = -q$ 、有限 maximum は $\epsilon = 1/q$ で値 $1 + q^2$ 。 $q = q_R + i q_I$ なら分子は $(\epsilon + q_R)^2 + q_I^2$ なので厳密な zero は消え、 $\epsilon = -q_R$ で $q_I^2/(1 + q_R^2)$ が残る。

IV.14 threshold 近傍で異なる幅の定義

問題

$\Gamma_l(E) = \gamma k^{2l+1}$ のとき pole、peak、half width を比較せよ。

解答

一 channel model を

$$D(E) = E - E_0 - \Delta(E) + \frac{i}{2}\gamma[2\mu E]^{l+1/2} \quad (4.21)$$

とする。pole は指定 sheet で $D(z_p) = 0$ を解く。実軸 peak は $\partial_E |D(E)|^2 = 2 \operatorname{Re}[D'(E)D(E)^*] = 0$ 、half-maximum は $|D(E_{\pm})|^2 = 2|D(E_{\text{peak}})|^2$ で定まる。 E_R が threshold から十分遠く $\Gamma(E)$ がほぼ一定なら三定義は一致する。threshold では k^{2l+1} の

branch と $\Gamma'(E)$ が大きく、特に $l = 0$ で $\Gamma \propto \sqrt{E}$ だから peak は pole の $\text{Re } z_p$ からずれ、下側 half point が $E = 0$ に衝突して非対称になる。従って $-2\text{Im } z_p$ 、FWHM、peak position を別々に報告する必要がある。

第5部

Stage V : radial exact WKB と monodromy

V.1 d 次元 radial 方程式

問題

第一微分を除き、effective inverse-square 係数を求めよ。

解答

d 次元で

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r - \frac{L^2}{r^2}, \quad L^2 Y_l = l(l+d-2)Y_l. \quad (5.1)$$

$\Psi = R_l(r)Y_l$ 、 $u_l = r^{(d-1)/2}R_l$ と置くと

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_l'' + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left\{ l(l+d-2) + \frac{(d-1)(d-3)}{4} \right\} \right] u_l = Eu_l. \quad (5.2)$$

括弧内は $[l + (d-2)/2]^2 - 1/4$ 。この $-1/4$ と exponential map の Schwarzian が 組み合わさって Langer の完全平方を作る。

V.2 origin の Frobenius 分類

問題

g/r^2 に対する二指数と square integrability、追加境界条件を論ぜよ。

解答

reduced radial Hilbert space $L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ で $-u'' + gu/r^2 = 0$ とすると

$$\nu_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4g}}{2}, \quad u_{\pm} \sim r^{\nu_{\pm}}. \quad (5.3)$$

$\nu > -1/2$ が L^2 条件である。 $g \geq 3/4$ では u_+ のみ可積分で limit point、境界条件は不要。 $-1/4 < g < 3/4$ では二解とも可積分で limit circle、self-adjoint extension を選ぶ一つの境界条件が要る。 $g = -1/4$ では $r^{1/2}$ と $r^{1/2} \log r$ 、 $g < -1/4$ では fall to the centre が生じ、下方有界な Hamiltonian のため追加の物理的 renormalization が必要。

V.3 Langer map の導出**問題**

$r = e^x$ と wave-function rescaling を行い $(l + 1/2)^2$ を導け。

解答

三次元 reduced radial 方程式を

$$\left[-\hbar^2 \partial_r^2 + 2m(V - E) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \quad (5.4)$$

と書く。 $r = e^x$ では $\partial_r^2 = e^{-2x}(\partial_x^2 - \partial_x)$ 。さらに $u(e^x) = e^{x/2}\phi(x)$ とすれば $(\partial_x^2 - \partial_x)u = e^{x/2}(\phi'' - \phi/4)$ 。従って

$$[-\hbar^2 \partial_x^2 + 2me^{2x}(V(e^x) - E) + \hbar^2(l + 1/2)^2] \phi = 0. \quad (5.5)$$

$1/4$ は Jacobian を unitary に実装した結果であり、経験的置換ではない。

V.4 三次元 harmonic oscillator の二つの量子化

問題

closed exact-WKB cycle と open path + origin monodromy で spectrum を導け。

解答

$V = m\omega^2 r^2/2$ 、Langer angular momentum $L = \hbar(l + 1/2)$ とする。radial momentum

$$p_r(r) = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 r^2 - L^2/r^2} \quad (5.6)$$

の二正 turning point 間の積分は留数計算で

$$\int_{r_-}^{r_+} p_r dr = \frac{\pi E}{2\omega} - \frac{\pi L}{2}. \quad (5.7)$$

二 turning point の Maslov 位相を入れ $\int_{r_-}^{r_+} p_r dr = \pi\hbar(n_r + 1/2)$ とすれば

$$E_{n_r, l} = \hbar\omega(2n_r + l + 3/2). \quad (5.8)$$

closed cycle では左辺を2倍した量を用いる。open path 法では外側 subdominant 解を origin へ接続し、regular Frobenius 指数 $l + 1$ の monodromy $e^{2\pi i(l+1)}$ を課す。同じ Langer residue が turning-point 位相と origin 位相を分けて上式を再現する。

V.5 Coulomb bound spectrum

問題

radial action から Coulomb spectrum を求め、角運動量位相を最後まで分けよ。

解答

$V = -\kappa/r$ 、 $E < 0$ 、 $L = \hbar(l + 1/2)$ とする。

$$p_r = \sqrt{2m(E + \kappa/r) - L^2/r^2}. \quad (5.9)$$

二 turning point 間の action は $r = 0, \infty$ の留数から

$$\int_{r_-}^{r_+} p_r dr = \pi \left(\frac{m\kappa}{\sqrt{-2mE}} - L \right). \quad (5.10)$$

turning-point 位相だけを右辺 $\pi\hbar(n_r + 1/2)$ に置き、最後に $L = \hbar(l + 1/2)$ を入れると

$$\frac{m\kappa}{\sqrt{-2mE}} = \hbar(n_r + l + 1), \quad E = -\frac{m\kappa^2}{2\hbar^2(n_r + l + 1)^2}. \quad (5.11)$$

角運動量の $1/2$ と二 turning point の $1/2$ が主量子数の整数を作る。

V.6 small-circle monodromy の regulator independence

問題

$r = \epsilon e^{i\phi}$ の局所 monodromy と ϵ 非依存条件を求めよ。

解答

Frobenius 解 $u \sim r^\nu$ は一周で $u \mapsto e^{2\pi i\nu} u$ 。二解の local monodromy 行列の固有値は $e^{2\pi i\nu_\pm}$ である。WKB では small circle 上の $\oint S dr$ と connection matrices の積が同じ量を与える。切断計算で bare monodromy $\mathcal{M}_0^{\text{bare}}(\epsilon)$ が ϵ に依存する なら

$$\mathcal{M}_0^{\text{phys}} = \frac{\mathcal{M}_0^{\text{bare}}(\epsilon)}{Z_{\text{mon}}(\epsilon)}, \quad \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \log \mathcal{M}_0^{\text{phys}} = 0 \quad (5.12)$$

を renormalization 条件とする。従って $\epsilon d \log Z_{\text{mon}} / d\epsilon = \epsilon d \log \mathcal{M}_0^{\text{bare}} / d\epsilon$ 。物理入力を選んだ self-adjoint domain または regular Frobenius branch である。

V.7 radial oscillator の quartic 摂動と最適化

問題

weak quartic perturbation を通常摂動論と optimized monodromy で比較せよ。

解答

$H = H_\omega + \lambda r^4$, oscillator length $b = (\hbar/m\omega)^{1/2}$, $N = 2n_r + l$ とする。一次摂動は

$$E_{n_r, l}^{(1)} = \lambda b^4 [(N + 3/2)(N + 5/2) + 2n_r(n_r + l + 1/2)]. \quad (5.13)$$

これは無次元結合 $g = \lambda \hbar / (m^2 \omega^3) \ll 1$ で有効。optimized 法では任意の Ω を導入して

$$H = H_\Omega + \delta \left[\frac{m}{2} (\omega^2 - \Omega^2) r^2 + \lambda r^4 \right], \quad (5.14)$$

δ で quantum period と origin monodromy を同じ次数まで展開し、 $\delta = 1$ 後に $\partial E_N / \partial \Omega = 0$ (PMS) または最後の係数 0 (FAC) で Ω_N を選ぶ。 $g \ll 1$ では $\Omega_N \rightarrow \omega$ で通常摂動と一致し、 $g \gtrsim 1$ では $\Omega \sim (\lambda \hbar / m^2)^{1/3}$ が strong-coupling scale を取り込み、固定 ω 展開より有効である。

V.8 Cornell potential の turning points

問題

$V(r) = -\kappa/r + \sigma r$ の turning points を求め、contour の homotopy を検査せよ。

解答

Langer 項を含む $p_r^2 = 2m[E + \kappa/r - \sigma r] - L^2/r^2$ の零点は

$$-2m\sigma r^3 + 2mEr^2 + 2m\kappa r - L^2 = 0 \quad (5.15)$$

の三根である。係数を scale して companion matrix の固有値として求め、各 parameter step で最小距離 matching だけでなく

root の analytic continuation により label を保つ。物理 cycle は二正実根を囲み、第三根と $r = 0$ pole を横切らない contour とする。

検算・数値確認

parameter を小刻みに変え、(i) root の置換を記録、(ii) contour を二通りに離散化、(iii) $\oint p_r dr$ の差が積分誤差以下、(iv) contour と pole の最小距離を記録する。差が $2\pi i$ times residue だけ跳べば singularity を横切ったので homotopy class が変わっている。

V.9 Yukawa-screened Coulomb の threshold

問題

$V(r) = -\kappa e^{-\mu r}/r$ で pole が cut に近づく点を追跡せよ。

解答

turning points は

$$2m \left[E + \frac{\kappa e^{-\mu r}}{r} \right] - \frac{L^2}{r^2} = 0 \quad (5.16)$$

の複素零点で、transcendental なので Newton 法と argument principle を併用する。 $\mu = 0$ の Coulomb roots から continuation し、同じ sheet の quantum period 条件を解く。 screening μ を増やすと最外 bound pole $k = i\kappa_b$ が $\kappa_b \downarrow 0$ へ動く。臨界値 μ_c は $E = 0$ の zero-energy regular 解が infinity で定数項を失う条件、同値に scattering length $a_0^{-1} = 0$ で決まる。 $\mu > \mu_c$ では pole は negative imaginary k axis の second sheet へ入り virtual state となる。 root 数は argument-principle contour で確認する。

V.10 座標変換が作る見かけの singularity

問題

Jacobian monodromy と物理的 self-adjoint-extension parameter を区別せよ。

解答

自由粒子 $-\partial_r^2$ に $r = e^x$, $u = e^{x/2}\phi$ を施すと、元の potential が正則でも変換後に $+\hbar^2/4$ と $x \rightarrow -\infty$ endpoint が現れる。同様に $r = y^2$ は $y = 0$ に inverse-square 型 Schwarzian 項を作る。しかし unitary Jacobian と元の domain を同時に写せば、変換後の Frobenius 係数比は一意であり新しい物理 parameter はない。これが Jacobian monodromy である。これに対し元の differential expression 自体が limit circle endpoint を持ち、二可積分分解の係数比を外部物理から選ぶ場合、その位相または length scale は genuine self-adjoint-extension parameter である。判定法は「逆変換で domain が既に一意か」である。

第6部

Stage VI : few-body continuum、 CDCC、complex scaling

VI.1 二 cluster projectile の座標と reduced mass

問題

fragment-target 座標と二つの reduced mass を導き kinetic energy を分離せよ。

解答

$P = c + v$ とし

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{R} = \frac{m_c \mathbf{r}_c + m_v \mathbf{r}_v}{m_P} - \mathbf{r}_T, \quad m_P = m_c + m_v. \quad (6.1)$$

projectile 重心 $\mathbf{r}_P$ から

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_P - \frac{m_v}{m_P} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_P + \frac{m_c}{m_P} \mathbf{r} \quad (6.2)$$

なので $\mathbf{R}_c = \mathbf{R} - (m_v/m_P)\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{R}_v = \mathbf{R} + (m_c/m_P)\mathbf{r}$ 。全重心を除く
正準変換により

$$T = \frac{\mathbf{P}_R^2}{2\mu_R} + \frac{\mathbf{p}_r^2}{2\mu_r}, \quad \mu_R = \frac{m_P m_T}{m_P + m_T}, \quad \mu_r = \frac{m_c m_v}{m_P}. \quad (6.3)$$

cross term は mass-weighted 重心の定義により相殺される。

VI.2 CDCC coupled radial 方程式

問題

三体 reaction Hamiltonian を channel basis へ射影し全項を導け。

解答

$$H = K_R + h_P + U_{cT}(\mathbf{R}_c) + U_{vT}(\mathbf{R}_v), \quad \Psi_N^{JM} = \frac{1}{R} \sum_c \chi_c^J(R) \mathcal{Y}_c^{JM} \quad (6.4)$$

とする。 $h_P \Phi_i = \epsilon_i \Phi_i$ と angular orthonormality を用いる。 K_R が $R^{-1} \chi Y_L$ に作用すると

$$K_R \frac{\chi}{R} Y_L = \frac{1}{R} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_R} \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{L(L+1)}{R^2} \right) \chi \right] Y_L. \quad (6.5)$$

$\langle \mathcal{Y}_c | (H - E_{\text{tot}}) | \Psi_N \rangle = 0$ を取れば

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_R} \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{L_c(L_c+1)}{R^2} \right) + \epsilon_c - E_{\text{tot}} \right] \chi_c^J(R) \quad (6.6)$$

$$+ \sum_{c'} U_{cc'}^J(R) \chi_{c'}^J(R) = 0, \quad (6.7)$$

$$U_{cc'}^J(R) = \langle \mathcal{Y}_c^{JM} | [U_{cT}(\mathbf{R}_c) + U_{vT}(\mathbf{R}_v)] | \mathcal{Y}_{c'}^{JM} \rangle_{\xi, \hat{R}}. \quad (6.8)$$

diagonal は channel potential、off-diagonal は excitation、breakup、continuum–continuum coupling を全て含む。

VI.3 momentum bin と強収束

問題

bin state を規格化し、step projection の強収束と非 norm 収束を示せ。

解答

$\langle \Phi_{k\alpha} | \Phi_{k'\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta(k - k')$ とする。区間 I_n で

$$|\Phi_{n\alpha}^{\text{bin}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{n\alpha}}} \int_{I_n} f_{n\alpha}(k) |\Phi_{k\alpha}\rangle dk, \quad N_{n\alpha} = \int_{I_n} |f_{n\alpha}(k)|^2 dk \quad (6.9)$$

なら非重複 bin は orthonormal。 P_N を区分一定関数への直交射影とすると、単関数の L^2 稠密性から任意の固定 wave packet g に対して $\|P_N g - g\|_2 \rightarrow 0$ 。しかし各有限分割に対し、各 bin 内で平均0となる規格化関数 g_N を選べば $P_N g_N = 0$ 、従って $\|\mathbf{1} - P_N\| = 1$ 。これは strong だが operator-norm ではない収束である。

VI.4 geometric Gaussian basis の pseudostate

問題

短距離 potential を短い Gaussian basis で対角化し、range 依存性を分類せよ。

解答

再現可能な例として $\hbar^2/(2\mu) = 1$ 、 $V(x) = -V_0 e^{-x^2/a^2}$ 、even basis $\phi_n(x) = e^{-\alpha_n x^2}$ 、 $\alpha_n = b_n^{-2}$ 、 $b_n = b_1 q^{n-1}$ を取る。行列は解析的に

$$N_{ij} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_i + \alpha_j}}, \quad (6.10)$$

$$T_{ij} = \frac{2\alpha_i \alpha_j \sqrt{\pi}}{(\alpha_i + \alpha_j)^{3/2}}, \quad (6.11)$$

$$V_{ij} = -V_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_i + \alpha_j + a^{-2}}}. \quad (6.12)$$

$Hc = ENc$ を Cholesky orthogonalization 後に解き、 b_N を 1.3 倍ずつ増やす。負固有値と内部確率 $\int_{|x|<3a} |\psi|^2 dx$ が安定するものが bound state。正固有値で内部確率と phase-sensitive observable が plateau を作るものが resonance-like stabilized pseudostate。 $E \propto b_N^{-2}$ で流れ内部確率が減るものが nonresonant box pseudostate である。 N の condition number と residual $\|Hc - ENc\|$ も同時に報告する。

VI.5 open/closed Coulomb channel の境界条件

問題

Coulomb open channel と Whittaker closed channel を導き flux factor を検査せよ。

解答

$E_c = E_{\text{tot}} - \epsilon_{c0}$ $E_c > 0$ なら $K_c = \sqrt{2\mu_R E_c}/\hbar$ 、漸近 radial 方程式は Coulomb 方程式なので

$$\chi_c \rightarrow \frac{i}{2} \left[H_{L_c}^{(-)}(\eta_c, K_c R) \delta_{cc0} - \sqrt{\frac{K_{c0}}{K_c}} S_{cc0}^J H_{L_c}^{(+)}(\eta_c, K_c R) \right]. \quad (6.13)$$

$H^{(\pm)}$ の Wronskian から flux は $\pm \hbar K_c / \mu_R$ times 振幅 二乗。従って square-root factor 後の各 outgoing flux は $K_{c0} |S_{cc0}|^2$ に比例し、 $\sum_c |S_{cc0}|^2 = 1$ が得られる。 $E_c < 0$ では $K_c = i\kappa_c$ とし、成長解を捨て $\chi_c \propto W_{-\eta_c, L_c+1/2}(2\kappa_c R)$ を選ぶ。

VI.6 closed channel の消去

問題

二 channel model で closed component を消去し、threshold 上下の polarization potential を求めよ。

解答

$$(E - H_{11})\chi_1 = V_{12}\chi_2, \quad (6.14)$$

$$(E - H_{22})\chi_2 = V_{21}\chi_1 \quad (6.15)$$

から

$$[E - H_{11} - U_{\text{pol}}(E)]\chi_1 = 0, \quad U_{\text{pol}} = V_{12}(E - H_{22})^{-1}V_{21}. \quad (6.16)$$

spectral resolution $H_{22}|n\rangle = \epsilon_n|n\rangle$ では $U_{\text{pol}} = \sum_n V_{12}|n\rangle\langle n|V_{21}/(E - \epsilon_n)$ 。全て $\epsilon_n > E$ の closed 領域では

Hermitian coupling に対し実数で、通常 attractive level shift を与える。continuum threshold 上で

$$(E - H_{22} + i0)^{-1} = PV(E - H_{22})^{-1} - i\pi\delta(E - H_{22}), \quad (6.17)$$

従って $\text{Im } U_{\text{pol}} = -\pi V_{12}\delta(E - H_{22})V_{21} \leq 0$ が open channel への loss width を表す。

VI.7 complex-scaled smoothing

問題

complex-scaled resolution から breakup response を導き、 θ 依存の相殺を示せ。

解答

reaction source $|F\rangle = \sum_n T_n |\Phi_n\rangle$ に対し

$$S(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \langle F | (E - h_P + i0)^{-1} | F \rangle. \quad (6.18)$$

analytic test space 上で $(E - h_P)^{-1} = U^{-1}(\theta)(E - h_P^\theta)^{-1}U(\theta)$ 。
extended resolution を有限基底で近似すると

$$S(E) \simeq -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_\nu \frac{\langle F | U^{-1} | \Phi_\nu^\theta \rangle \langle \tilde{\Phi}_\nu^\theta | U | F \rangle}{E - E_\nu^\theta}. \quad (6.19)$$

完全基底なら $\sum_\nu |\Phi_\nu^\theta\rangle \langle \tilde{\Phi}_\nu^\theta| = \mathbf{1}$ で、隣接する $U^{-1}U$ が相殺し 元の resolvent matrix element に戻る。有限基底の残留 θ 依存は pole と rotated-cut pseudostates の不完全な相殺を測る収束誤差である。

VI.8 alpha+p+n の Jacobi sets と isospin exchange

問題

三 Jacobi set を作り、 $p \leftrightarrow n$ 対称性とその破れを示せ。

解答

粒子を $(p, n, \alpha) = (1, 2, 3)$ とし、循環置換 (i, j, k) ごとに

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{r}_i - \frac{m_j \mathbf{r}_j + m_k \mathbf{r}_k}{m_j + m_k} \quad (6.20)$$

を取れば、 $p + n$ 、 $n + \alpha$ 、 $\alpha + p$ pair を内部に持つ三 set が得られる。isospin limit $m_p = m_n$ 、 $V_{\alpha p}^N = V_{\alpha n}^N$ では exchange P_{pn} が $n\alpha$ set と $p\alpha$ set を入れ替え、basis を $[\Phi_{n\alpha} \pm \Phi_{p\alpha}]/\sqrt{2}$ に組める。Coulomb $V_{\alpha p}^C$ 、proton-target Coulomb、電磁 spin-orbit、実際の $m_p - m_n$ がこの対称性を破る。核力部分と電磁部分を別々に行列化すれば破れの大きさを直接検査できる。

VI.9 p+p+7Be の二 rearrangement と double counting

問題

同一 proton を反対称化した振幅を作り、inclusive sum の二重計数を検査せよ。

解答

labelled amplitude を $A_1 = A[p_1 + (p_2 {}^7\text{Be})]$ 、 $A_2 = A[p_2 + (p_1 {}^7\text{Be})]$ とする。proton pair spin S について

$$A_S(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1(1, 2) - (-1)^{S+1} A_2(1, 2)] \quad (6.21)$$

と組み、isospin $T = 1$ の対称性を含め全 wave function を反対称にする。物理 phase space を labelled variables で全領域積分するなら $1/2!$ を掛ける。数値試験は (i) $|A_S(2, 1)|^2 = |A_S(1, 2)|^2$ 、

(ii) 全領域の $1/2!$ 付き 積分が $E_1 \geq E_2$ の半領域積分と一致、(iii) coupling を切った極限で incoherent labelled sum のちょうど半分、を確認する。interference 項を 落とした上で $1/2$ だけ掛けるのは反対称化ではない。

VI.10 zero recoil での s-wave enhancement

問題

spherical Bessel transform を小 recoil momentum で展開し、局所 bin の partial-wave hierarchy を示せ。

解答

multipole l の Fourier–Bessel transform は

$$F_l(q) = \int_0^\infty r^2 u_l(r) j_l(qr) dr, \quad j_l(z) = \frac{z^l}{(2l+1)!!} [1 + \mathcal{O}(z^2)]. \quad (6.22)$$

従って $F_0(q) = \int r^2 u_0 dr + \mathcal{O}(q^2)$ だが $F_1(q) = q \int r^3 u_1 dr/3 + \mathcal{O}(q^3)$ 。 $q \simeq 0$ の狭い acceptance では p wave 強度は q^2 で抑えられ、small integrated spectroscopic weight の s wave が支配し得る。一方広い q 範囲では phase space と大きな p component の積分が勝つ。従って zero-recoil bin の比と全積分の比は同じ observable ではない。

VI.11 alpha+n+n の Jacobi 変換と neutron exchange

問題

三 Jacobi set、reduced mass、 $S = 0, 1$ の交換符号を求めよ。

解答

$m_n = m$ 、 $m_\alpha = M$ とする。T set は

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{y}_T = \mathbf{r}_\alpha - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mu_{xT} = \frac{m}{2}, \quad \mu_{yT} = \frac{2mM}{2m + M}. \quad (6.23)$$

二つの Y set は

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{r}_2 - \frac{M\mathbf{r}_\alpha + m\mathbf{r}_1}{M + m}, \quad (6.24)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{M\mathbf{r}_\alpha + m\mathbf{r}_2}{M + m}, \quad (6.25)$$

$\mu_x = mM/(m + M)$ 、 $\mu_y = m(m + M)/(2m + M)$ 。neutron isospin $T = 1$ は対称なので、全体反対称性から spin singlet $S = 0$ (反対称 spin) には exchange-even spatial combination、triplet $S = 1$ には exchange-odd combination を用いる。T set ではそれぞれ $(-1)^{l_x} = +1, -1$ である。

VI.12 6He response と pole term の符号

問題

extended complex-scaled resolution から response を導き、単独 pole term が負になり得る理由を述べよ。

解答

h_6^θ の biorthogonal resolution を挿入して

$$S_F(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_\nu \frac{M_\nu^\theta \widetilde{M}_\nu^\theta}{E - E_\nu^\theta}, \quad (6.26)$$

$$M_\nu^\theta = \langle F | U^{-1} | \Phi_\nu^\theta \rangle, \quad (6.27)$$

$$\widetilde{M}_\nu^\theta = \langle \widetilde{\Phi}_\nu^\theta | U | F \rangle. \quad (6.28)$$

を得る。isolated pole の積 $M_R^\theta \widetilde{M}_R^\theta$ は一般に複素で、background との干渉を含まないため $-\text{Im}[M_R^\theta \widetilde{M}_R^\theta / (E - z_R)] / \pi$ は局所的に負にもなる。一方完全な response は元の自己共役 h_6 の spectral measure $\langle F | \delta(E - h_6) | F \rangle \geq 0$ であり、全 pole と cut の coherent sum 後に非負となる。

VI.13 Riesz projector の pseudostate 表現

問題

complex-scaled pole projector を実 pseudostate basis へ戻し、収束試験を与えよ。

解答

単純 pole で

$$P_R^\theta = |\Phi_R^\theta\rangle\langle\tilde{\Phi}_R^\theta|, \quad \mathcal{P}_R = U^{-1}P_R^\theta U. \quad (6.29)$$

$P_N = \sum_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|$ を両側に挿入すると

$$(\mathcal{P}_R^{(N)})_{ij} = \langle\Phi_i|U^{-1}|\Phi_R^\theta\rangle\langle\tilde{\Phi}_R^\theta|U|\Phi_j\rangle, \quad (6.30)$$

すなわち outer product の coherent rank-one 行列を得る。

検算・数値確認

基底と θ を変え、(i) singular value が一つだけ安定、(ii) $|\text{Tr } \mathcal{P}_R^{(N)} - 1|$ 、(iii) $\|(\mathcal{P}_R^{(N)})^2 - \mathcal{P}_R^{(N)}\|$ 、(iv) 物理 source/detector 間の matrix element、を検査する。energy window 内の対角和は rank と位相を保存しないので代用にならない。

VI.14 三体 phase-space Jacobian

問題

Jacobi momentum normalization を宣言して二重微分 breakup strength の Jacobian を導け。

解答

$\langle \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y | \mathbf{k}'_x, \mathbf{k}'_y \rangle = \delta^3(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}'_x) \delta^3(\mathbf{k}_y - \mathbf{k}'_y)$ とする。 $\epsilon_x = \hbar^2 k_x^2 / (2\mu_x)$ 、

$\epsilon_y = \hbar^2 k_y^2 / (2\mu_y)$ だから

$$d^3 k_x d^3 k_y = \frac{\mu_x \mu_y}{\hbar^4} k_x k_y d\epsilon_x d\epsilon_y d\Omega_x d\Omega_y. \quad (6.31)$$

従って本体の $\mathcal{J}$ は、状態規格化の (2π) factors と incident flux を別にすれば $\mu_x \mu_y k_x k_y / \hbar^4$ 。二重微分式を両 energy と 両角度で積分すれば元の $\int |T(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)|^2 d^3 k_x d^3 k_y$ が再現される。別 Jacobi set を混ぜるときは mass-scaled 変換の unit determinant と同一粒子 $1/2!$ を同じ規約で扱う。

VI.15 二 channel incoming block の pole residue

問題

具体的左右 null vector で matrix inverse の pole を検証し、source/detector overlap を同定せよ。

解答

$$C_{\text{in}}(E) = \begin{pmatrix} E - z_R & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

を取る。 $E = z_R$ で右 null vector $u_R = (1, 0)^T$ 、左 null vector $v_R^\dagger = (1, -g)$ 、かつ $v_R^\dagger C'_{\text{in}}(z_R) u_R = 1$ 。実際

$$C_{\text{in}}(E)^{-1} = \frac{u_R v_R^\dagger}{E - z_R} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

一般の場合も pole part は $u_R v_R^\dagger / [(E - z_R) v_R^\dagger C'_{\text{in}}(z_R) u_R]$ 。CDCC が作る channel source column を s 、CSLS detector row を $d^\dagger$ とすれば residue は

$$\frac{(d^\dagger u_R)(v_R^\dagger s)}{v_R^\dagger C'_{\text{in}}(z_R) u_R}. \quad (6.34)$$

前二因子がそれぞれ detector と source の overlap、分母が exact-WKB connection derivative に対応する。

第7部

Stage VII : exceptional point と幾何学的 holonomy

VII.1 2-by-2 complex-symmetric EP

問題

一般 complex-symmetric 行列を対角化し二次 EP 条件を求めよ。

解答

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad E_{\pm} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}. \quad (7.1)$$

従って discriminant

$$\Delta = (a-d)^2 + 4b^2 = 0 \quad (7.2)$$

で固有値が合流する。さらに $b = 0$ かつ $a = d$ なら $H = a\mathbf{1}$ で二本の固有vectorが残る ordinary degeneracy である。EP には $H - E_{\text{EP}}\mathbf{1} \neq 0$ 、rank 1 が必要。例えば $r = (b, E - a)^T$ の二枝は $\Delta \rightarrow 0$ で同一直線へ合流する。

VII.2 Jordan chain と resolvent の二重 pole

問題

長さ2の Jordan chain を作り resolvent の x^{-2}, x^{-1} 項を求めよ。

解答

$(H - z_0)r_0 = 0$ 、 $(H - z_0)r_1 = r_0$ とし、Jordan block 上で $H =$

$z_0 \mathbf{1} + N$ 、 $N^2 = 0$ 。 $x = z - z_0$ なら本書の resolvent は

$$(z - H)^{-1} = (x \mathbf{1} - N)^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{x} + \frac{N}{x^2}. \quad (7.3)$$

dual Jordan basis l_0, l_1 を $\langle l_i, r_j \rangle = \delta_{ij}$ と取れば $\mathbf{1}_J = |r_0\rangle\langle l_0| + |r_1\rangle\langle l_1|$ 、 $N = |r_0\rangle\langle l_1|$ 。従って

$$\mathcal{R}_J(z) = \frac{|r_0\rangle\langle l_1|}{x^2} + \frac{|r_0\rangle\langle l_0| + |r_1\rangle\langle l_1|}{x}. \quad (7.4)$$

$\mathcal{C}_{\text{in}}(E)$ の二重零点の逆に現れる二係数と同じ pole order である。

VII.3 EP の self-orthogonality

問題

coalesced 右 vector と左 partner の内積が0になることを示せ。

解答

EP で右 Jordan chain を $(H - E_*)r_0 = 0$ 、 $(H - E_*)r_1 = r_0$ 、左固有vectorを $l_0(H - E_*) = 0$ とする。第二式を左から掛ければ直ちに

$$\langle l_0, r_0 \rangle = \langle l_0, (H - E_*)r_1 \rangle = 0. \quad (7.5)$$

parameter 微分でも同じ結果が見える。 $(H - E)r = 0$ を λ で微分して左固有vectorを掛けると $E'\langle l, r \rangle = \langle l, H'r \rangle$ 。EP 近傍で $E' \sim (\lambda - \lambda_*)^{-1/2}$ が発散する一方、右辺が有限なら $\langle l, r \rangle \rightarrow 0$ が必要である。

VII.4 branch point の一周と二周

問題

square-root EP を周回して固有値・固有vector・gauge を追跡せよ。

解答

局所 normal form $H(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ を用いる。 $\lambda = \rho e^{i\varphi}$ とすると $E_{\pm} = \pm\sqrt{\rho}e^{i\varphi/2}$ 、 $r_{\pm} = (1, E_{\pm})^T$ 。 $\varphi : 0 \rightarrow 2\pi$ で $E_+ \rightarrow E_-$ 、 $r_+ \rightarrow r_-$ 、すなわち label が交換する。二周で固有値は元へ戻る。vector の比較には各 step で biorthogonal overlap を正実にする parallel-transport gauge を選び、最後だけ初期 gauge と比較する。任意に各点の第一成分を実にする gauge は途中で不連続となり位相を捏造する。二周後の符号または位相は、この連続 gauge で初めて幾何学的 holonomy として定義される。

VII.5 biorthogonal Berry connection

問題

二準位 model の Berry connection と gauge 変換部分を求めよ。

解答

上の model で右 vector $r = (1, E)^T$ 、左 vector を $l^T = (E, 1)/(2E)$ とすれば $l^T r = 1$ 。従って

$$\mathcal{A} = i l^T dr = \frac{i}{2} \frac{dE}{E} = \frac{i}{4} \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (7.6)$$

$r \mapsto e^f r$ 、 $l \mapsto e^{-f} l$ では $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} + i df$ 。従って局所 connection は gauge 依存だが、閉路積分の exponential は f が一価なら不変。EP の一周では state 自体が相手の sheet へ移るので、二周または permutation matrix を含む non-Abelian transport として比較する。

VII.6 momentum bin と continuum normalization

問題

delta-normalized state を幅 Δk の bin に置き換え、発散 normalization と有限 holonomy を分離せよ。

解答

$\langle k|k'\rangle = \delta(k - k')$ とし

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} |k\rangle dk. \quad (7.7)$$

なら $\langle n|n\rangle = 1$ 。一方、中央の generalized state に戻す係数は $|n\rangle \simeq \sqrt{\Delta k}|k_0\rangle$ 、従って $|k_0\rangle \simeq (\Delta k)^{-1/2}|n\rangle$ と発散する。parameter-dependent bin の Berry connection は

$$\langle \tilde{n}, dn \rangle = -\frac{1}{2} d \log \Delta k + \mathcal{A}_{\text{shape}} + \mathcal{A}_{\text{phys}}. \quad (7.8)$$

最初の exact differential は normalization artifact。閉路で bin の幅と 端点を同じ値へ戻し、shape 項を同一規約で差し引けば $\oint \mathcal{A}_{\text{phys}}$ が有限 holonomy として残る。

VII.7 bin-width independence の RG 方程式

問題

renormalized geometric phase の Δk 非依存条件と積分定数を求めよ。

解答

bare phase を $\gamma_B(\Delta k)$ 、counterterm を $C(\Delta k, \mu)$ とし

$$\gamma_R(\mu) = \gamma_B(\Delta k) + C(\Delta k, \mu), \quad \Delta k \frac{d\gamma_R}{d\Delta k} = 0 \quad (7.9)$$

を課す。もし $\Delta k d\gamma_B/d\Delta k = c + o(1)$ なら

$$C = -c \log \frac{\Delta k}{\mu} + C_0, \quad \mu \frac{d\gamma_R}{d\mu} = c. \quad (7.10)$$

C_0 は局所発散からは決まらない。reference loop の phase を0とする、detector の asymptotic phase convention を固定する、または一つの実測値へ match する、といった物理的 convention/data がこれを決める。

VII.8 EP と continuum threshold の競合

問題

EP が threshold へ近づくとき二つの branch をどう扱うべきか説明せよ。

解答

threshold E_{th} では resolvent 自己 energy が $\Sigma(E) \sim a + b(E - E_{\text{th}})^{l+1/2}$ を持つ。一方孤立 EP は $E_{\pm} - E_* \sim \pm c\sqrt{\lambda - \lambda_*}$ 。両者が近いと局所 determinant は例えば

$$D(E, \lambda) = A(E - E_*)^2 + B(\lambda - \lambda_*) + C(E - E_{\text{th}})^{l+1/2} + \dots \quad (7.11)$$

となり、単純な二次多項式 normal form は一様でない。 s wave なら $k = \sqrt{E - E_{\text{th}}}$ で uniformize し、 $D(k, \lambda) = 0$ と $\partial_k D = 0$ を同じ sheet で解く。EP sheet exchange と $k \mapsto -k$ の threshold exchange が合成され、周回 permutation は経路がどの branch point を囲むかに依存する。

VII.9 condition number と pseudospectrum

問題

EP 周回上の eigenvalue condition number を計算し pseudospectral sensitivity と結べ。

解答

単純固有値の condition number は

$$\kappa_n = \frac{\|r_n\| \|l_n\|}{|\langle l_n, r_n \rangle|}. \quad (7.12)$$

biorthonormal gauge でも vector norm の積として同じ値が残る。二次 EP から距離 $\rho = |\lambda - \lambda_*|$ では左右 overlap が $\mathcal{O}(\sqrt{\rho})$ なので $\kappa \sim \rho^{-1/2}$ 。摂動 δH に対し $|\delta E_n| \lesssim \kappa_n \|\delta H\|$ 。従って周回上で κ が大きい点は ϵ -pseudospectrum の等高線が膨らむ点と一致する。数値的には左右 residual を一定に保って $\kappa(\varphi)$ と最小 singular value $s_{\min}(E - H)$ を同時に plot する。

VII.10 multiple-zero continuation test

問題

$C = \partial_E C = 0$ を用いる探索と near crossing との識別法を設計せよ。

解答

scalar determinant または適切な incoming minor について

$$F_1(E, \lambda) = C(E, \lambda) = 0, \quad F_2(E, \lambda) = \partial_E C(E, \lambda) = 0 \quad (7.13)$$

を complex Newton 法で同時に解く。Jacobian は $\partial(E, \lambda)(F_1, F_2)$ 、必要なら complex-step/automatic differentiation を使う。候補点の検証は

- (a) operator の geometric multiplicity が 1、Jordan residual が小さい；
- (b) 小円周回で二 pole が交換し、二周で戻る；
- (c) splitting が radius の平方根に比例；
- (d) basis $\cdot$ contour $\cdot$ complex-scaling angle を変えて点と Riesz projector が安定；
- (e) $C_{EE} \neq 0, C_\lambda \neq 0$ 。

near crossing は有限最小 gap を持ち、一周で label 交換せず、Newton 解が discretization とともに漂う。

第8部

Stage VIII : Regge–Wheeler 方程式 と black-hole QNM

VIII.1 Schwarzschild tortoise 座標

問題

Schwarzschild metric から r_* と両端の漸近形を導け。

解答

$f(r) = 1 - 2M/r$ とし radial null line $0 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2$ を $t \mp r_* = \text{const.}$ にするには $dr_*/dr = f^{-1}$ 。従って

$$r_* = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) + C. \quad (8.1)$$

$C = 0$ とすると horizon $r = 2M + \epsilon$ で

$$r_* = 2M \log \frac{\epsilon}{2M} + 2M + O(\epsilon) \rightarrow -\infty, \quad (8.2)$$

infinity で $r_* = r + 2M \log(r/2M) + O(M^2/r) \rightarrow +\infty$ 。従って外部領域は $r_* \in \mathbb{R}$ 全体へ写る。

VIII.2 spherical harmonics の parity と odd metric 成分

問題

scalar/vector/tensor harmonic の parity を示し odd sector の自由成分を数えよ。

解答

parity map $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\pi - \vartheta, \varphi + \pi)$ で $Y_{lm} \mapsto (-1)^l Y_{lm}$. polar vector $D_A Y$ は $(-1)^l$, sphere volume form を掛けた axial vector $X_A = -\varepsilon_A{}^B D_B Y$ は追加の負号を得て $(-1)^{l+1}$. polar/axial tensor もそれぞれ $(-1)^l, (-1)^{l+1}$. fixed (l, m) の odd metric は $h_t X_A$, $h_r X_A$, $h_2 X_{AB}$ の 3 scalar amplitude. odd gauge function ξX_A 一つで $h_2 = 0$ にでき、2 amplitude が残る。Einstein constraint が一つを nondynamical にし、最終的な propagating master field は 1. $l = 0$ に odd harmonic はなく、 $l = 1$ で $X_{AB} = 0$ なので別扱い。

VIII.3 linearized Einstein 方程式から covariant Regge–Wheeler 方程式へ

問題

warped-product identities を用いた projection と elimination を示せ。

解答

$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b + r^2 \Omega_{AB} d\theta^A d\theta^B$ とし、odd perturbation を $h_{aB} = h_a X_B$, $h_{AB} = h_2 X_{AB}$ と展開する。gauge invariant combination は

$$\tilde{h}_a = h_a - \frac{1}{2} \nabla_a h_2 + \frac{r_a}{r} h_2. \quad (8.3)$$

$D^A X_A = 0$, $D^2 X_A = [1 - l(l+1)] X_A$, $D^B X_{AB} = -(l-1)(l+2) X_A/2$ を linearized Ricci tensor へ代入すると

$$0 = P_a = -\square_2 \tilde{h}_a + \nabla_a \nabla_b \tilde{h}^b + \frac{2}{r} (r_b \nabla_a \tilde{h}^b - r_a \nabla_b \tilde{h}^b) \quad (8.4)$$

$$- \frac{2}{r^2} r_a r_b \tilde{h}^b + \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{h}_a, \quad (8.5)$$

$$0 = P = \nabla_a \tilde{h}^a. \quad (8.6)$$

$\lambda = (l-1)(l+2)$ とし

$$\Psi_{\text{odd}} = \frac{2r}{\lambda} \varepsilon^{ab} \left(\nabla_a \tilde{h}_b - \frac{2}{r} r_a \tilde{h}_b \right) \quad (8.7)$$

を定義する。 $\varepsilon^{ab}\nabla_a P_b$ を取り、背景 identity $\nabla_a \nabla_b r = (M/r^2)g_{ab}$ 、 $r_a r^a = f$ 、constraint $P = 0$ を使うと

$$\varepsilon^{ab}\nabla_a P_b = -\frac{\lambda}{2r} \left[\square_2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{6M}{r^3} \right] \Psi_{\text{odd}}. \quad (8.8)$$

従って bracket が0。Bianchi identity は残りの projected equation が従属であることを保証する。これが成分を飛ばさない gauge-invariant 導出である。

VIII.4 Regge-Wheeler potential と低 multipole

問題

potential を導き両端を検査し、 $l = 0, 1$ の例外を説明せよ。

解答

$\square_2 = -f^{-1}\partial_t^2 + \partial_r(f\partial_r)$ と $\partial_{r_*} = f\partial_r$ を前問へ代入し

$$[-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2 - V_l^{\text{RW}}(r)]\Psi_{\text{odd}} = 0, \quad V_l^{\text{RW}} = f \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] \quad (8.9)$$

を得る。horizon では $f \rightarrow 0$ なので $V \rightarrow 0$ exponentially in r_* 、infinity では $V = l(l+1)/r^2 + O(r^{-3}) \rightarrow 0$ 。 $l = 0$ には odd vector harmonic が存在しない。 $l = 1$ では $\lambda = 0$ で tensor harmonic と radiative master definition が消え、vacuum static solution は background の angular momentum を変える infinitesimal Kerr perturbation である。従って wave potential formula を機械的に $l = 0, 1$ へ適用しない。

VIII.5 horizon と infinity の符号

問題

$e^{-i\omega t}$ 規約で QNM 条件を vanishing connection coefficient として書け。

解答

horizon の future-regular ingoing wave は advanced time $v = t + r_*$ の関数 $e^{-i\omega v}$ なので radial factor は $e^{-i\omega r_*}$ 。infinity の outgoing wave は retarded time $u = t - r_*$ の関数で radial factor $e^{+i\omega r_*}$ 。horizon-normalized 解を f_H^{in} とし infinity で

$$f_H^{\text{in}} = C_{\text{out}}(\omega)e^{+i\omega r_*} + C_{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega r_*} \quad (8.10)$$

と展開する。QNM 条件は $C_{\text{in}}(\omega) = 0$ 。Im $\omega < 0$ では両端の QNM radial factor は実 r_* 上で発散するが、これは符号誤りでなく resonance boundary condition である。

VIII.6 barrier-top WKB による fundamental QNM

問題

Schwarzschild fundamental mode を leading WKB で見積もり M scaling と比較せよ。

解答

frequency equation $[-\partial_{r_*}^2 + V]\psi = \omega^2\psi$ の barrier maximum r_0 で $V \simeq V_0 + V_0''(r_* - r_{*0})^2/2$ とすると

$$\omega^2 \simeq V_0 - i(n + 1/2)\sqrt{-2V_0''}. \quad (8.11)$$

gravitational $l = 2$ では $r_0/M = (9 + \sqrt{17})/4 = 3.280776\dots$ 、 $M^2V_0 = 0.1512867$ 、 $M^4V_0'' = -0.00991941$ 。 $n = 0$ より

$$M\omega_{20}^{\text{WKB}} \simeq 0.39885 - 0.08829i. \quad (8.12)$$

高精度値 $M\omega_{20} \simeq 0.37367 - 0.08896i$ と比べ、damping は良く 実部

は leading order の誤差を示す。metric を $r = M\bar{r}$ 、 $r_* = M\bar{r}_*$ と scale すれば方程式は $(M\omega)^2$ のみを含むので $\omega \propto M^{-1}$ 。

VIII.7 tortoise coordinate の complex scaling

問題

QNM exposure 条件と inverse map の branch による制限を導け。

解答

両端で $r_* \mapsto e^{i\theta} r_*$ とする。右端 outgoing wave と左端 ingoing wave ($r_* = -s$) はいずれも magnitude

$$\left| e^{i\omega s e^{i\theta}} \right| = e^{-s \operatorname{Im}(\omega e^{i\theta})} \quad (8.13)$$

を持つので $\operatorname{Im}(\omega e^{i\theta}) > 0$ 、すなわち $\theta > -\arg \omega$ が exposure 条件。ただし

$$r = 2M \left[1 + W \left(e^{r_*/(2M)-1} \right) \right] \quad (8.14)$$

で inverse map は Lambert W の branch を含む。global straight rotation は logarithm/ W branch cut、 $r = 0$ singularity、他 sheet の horizon image を横切り得る。従って実際には potential が解析な有限内部区間を保ち、両 tail だけを曲げる exterior/smooth complex scaling を用いる。

VIII.8 Gaussian basis 行列と conditioning

問題

Regge–Wheeler 方程式の overlap/kinetic 行列を作り精度喪失を診断せよ。

解答

一例として中心 x_j と range b_j を持つ $\phi_j(r_*) = (r_* - x_j)^{p_j} e^{-\alpha_j(r_* - x_j)^2}$ を使う。 $p = 0$ 、共通中心なら

$$N_{ij} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_i + \alpha_j}}, \quad T_{ij} = \frac{2\alpha_i\alpha_j\sqrt{\pi}}{(\alpha_i + \alpha_j)^{3/2}}, \quad V_{ij} = \int \phi_i V_{\text{RW}} \phi_j dr_*.$$
(8.15)

complex scaling 後は derivative に $e^{-2i\theta}$ 、potential argument に deformation を入れる。geometric range ratio q が 1 に近すぎると columns がほぼ従属、遠すぎると中間 scale が欠落する。polynomial order 増大も moment 行列の dynamic range を増やす。

検算・数値確認

N の smallest eigenvalue と condition number、Cholesky/ SVD cutoff、generalized residual、左右 overlap、working precision を記録する。precision を倍にして安定桁が増えない eigenvalue は物理 pole と認定しない。

VIII.9 Schwarzschild–de Sitter の二 horizon と Nariai limit

問題

二 horizon を $r_* \rightarrow \pm\infty$ へ写し near-Nariai barrier scaling を求めよ。

解答

$f = 1 - 2M/r - \Lambda r^2/3$ の正根を $r_b < r_c$ とする。各単純根で $f \simeq 2\kappa_b(r - r_b)$ 、 $f \simeq 2\kappa_c(r_c - r)$ 、 $\kappa_h = |f'(r_h)|/2$ 。従って

$$r_* \sim \frac{1}{2\kappa_b} \log(r - r_b) \rightarrow -\infty, \quad (8.16)$$

$$r_* \sim -\frac{1}{2\kappa_c} \log(r_c - r) \rightarrow +\infty. \quad (8.17)$$

$\delta = \sqrt{1 - 9\Lambda M^2} \downarrow 0$ と置くと

$$r_{b,c} = 3M \left(1 \mp \frac{\delta}{\sqrt{3}} + O(\delta^2) \right), \quad (8.18)$$

$$r_c - r_b = 2\sqrt{3}M\delta + O(\delta^2), \quad (8.19)$$

$$\kappa_{b,c} \sim \frac{\delta}{3\sqrt{3}M}. \quad (8.20)$$

coordinate r では static region が縮むが r_* 幅は $O(\kappa^{-1}) \sim M/\delta$ に広がる。master potential の高さは $O(\kappa^2)$ 、従って near-Nariai QNM frequency も $O(\kappa)$ 。

VIII.10 QNM pole と continuum level density

問題

QNM pole contribution と reference-subtracted cut contribution を比較せよ。

解答

適切な source F と reference operator に対し

$$\Delta_F(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [\langle F | \mathcal{R}(E + i0) | F \rangle - \langle F | \mathcal{R}_{\text{ref}}(E + i0) | F \rangle]. \quad (8.21)$$

contour を変形すると単純 QNM $z_R = \omega_R^2$ の項は

$$\Delta_R(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{Z_F}{E - z_R}, \quad Z_F = \frac{\mathcal{N}_F(z_R)}{\partial_E \mathcal{C}_{\text{in}}(z_R)}, \quad (8.22)$$

残りが reference-subtracted branch cut と他 poles。 Z_F は複素で cut は energy dependent なので、全 response の extremum 条件 $\partial_E[\Delta_R + \Delta_{\text{cut}}] = 0$ は一般に $E = \text{Re } z_R$ で満たされない。さらに $E = \omega^2$ の非線形写像により frequency plot の peak も $\text{Re } \omega_R$ と一致しない。pole position、residue、full real-axis peak を別々に報告する。

第9部

付録 R：再総和・最適化・instanton

R.1 quartic integral の厳密式

問題

$I(g) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-x^2/2 - gx^4/4} dx$ を Bessel K で表し、 $g \downarrow 0$ 展開を検査せよ。

解答

被積分関数は偶関数なので $y = x^2$ と置くと

$$I(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{-1/2} e^{-y/2 - gy^2/4} dy. \quad (9.1)$$

標準積分

$$\int_0^\infty e^{-ax^4 - bx^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{b}{a}} e^{b^2/(8a)} K_{1/4} \left(\frac{b^2}{8a} \right) \quad (9.2)$$

へ $a = g/4, b = 1/2$ を入れ、負半軸も加えると

$$I(g) = \frac{e^{1/(8g)}}{2\sqrt{\pi g}} K_{1/4} \left(\frac{1}{8g} \right). \quad (9.3)$$

$K_\nu(z) \sim \sqrt{\pi/(2z)} e^{-z} [1 + (4\nu^2 - 1)/(8z) + \dots]$ を代入すると $I(0^+) = 1$ 、さらに

$$I(g) \sim \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\Gamma(2n + 1/2)}{\sqrt{\pi}, n!} g^n = 1 - \frac{3}{4}g + \frac{105}{32}g^2 - \dots \quad (9.4)$$

となり Gaussian moment 展開と一致する。

R.2 coefficient ratio から Borel singularity

問題

三つの連続比から nearest Borel singularity と leading $1/n$ correction を求めよ。

解答

係数の厳密比は

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(2n+1/2)(2n+3/2)}{n+1} = -4n - \frac{3}{4(n+1)}. \quad (9.5)$$

$a_n \sim CA^{-n}\Gamma(n)[1+c_1/n+\mathcal{O}(n^{-2})]$ と仮定すると $A = -1/4$ 。連続三比 r_{n-1}, r_n, r_{n+1} を用いて A, c_1 を二 parameter fit または Richardson extrapolation すれば

$$a_n \sim C(-4)^n\Gamma(n) \left[1 - \frac{3}{16n} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right]. \quad (9.6)$$

従って Borel singularity は $t = A = -1/4$ 、leading $1/n$ coefficient は $c_1 = -3/16$ 。比 $r_n/(-4n)$ 自体では $1/n$ 項が相殺して最初の補正が $3/(16n^2)$ になる点に注意する。

R.3 direct Padé と Borel–Padé at $g=0.4$

問題

両手法を比較し Borel poles と積分可能性を判定せよ。

解答

$2m+1$ 個の係数から direct $[m/m]$ と、 $b_n = a_n/n!$ に対する Borel $[m/m]$ を作る。後者を $g^{-1} \int_0^\infty e^{-t/g} P_m(t)/Q_m(t) dt$ と積分する。厳密値は $I(0.4) = 0.857608585344409\dots$ 。double precision で得る代表値は

m	direct Padé	Borel-Padé	Borel-Padé 誤差
2	0.8690245430	0.8593359439	1.73×10^{-3}
3	0.8623081645	0.8578991758	2.91×10^{-4}
4	0.8597745764	0.8576650427	5.65×10^{-5}
5	0.8586885057	0.8576207823	1.22×10^{-5}
6	0.8581795924	0.8576114484	2.86×10^{-6}
8	0.8577902863	0.8576087764	1.91×10^{-7}

$m = 2$ の Borel poles は約 $-0.3112, -1.0121$ 、 $m = 4$ では $-0.2678, -0.3662, -0.7131, -2.9235$ 。次数とともに負実軸 $(-\infty, -1/4]$ の cut を模倣し、正実軸上には pole がないので処方なしに積分できる。正実 pole が現れる off-diagonal sequence は Froissart pair か真の obstruction かを residue と次数安定性で判定し、理由なく避けて積分してはならない。

R.4 third-order optimized perturbation

問題

$I_N(g, \Omega)$ を導き正の PMS roots を追跡せよ。

解答

$A = 1 - \Omega$ とし、 Ω Gaussian moment $\langle x^{2m} \rangle_\Omega = (2m-1)!!\Omega^{-m-1/2}$ を使う。 $\delta = 1$ 後

$$I_0 = \Omega^{-1/2}, \quad (9.7)$$

$$I_1 = I_0 - \frac{A}{2\Omega^{3/2}} - \frac{3g}{4\Omega^{5/2}}, \quad (9.8)$$

$$I_2 = I_1 + \frac{3A^2}{8\Omega^{5/2}} + \frac{15Ag}{8\Omega^{7/2}} + \frac{105g^2}{32\Omega^{9/2}}, \quad (9.9)$$

$$I_3 = I_2 - \frac{5A^3}{16\Omega^{7/2}} - \frac{105A^2g}{32\Omega^{9/2}} - \frac{945Ag^2}{64\Omega^{11/2}} - \frac{3465g^3}{128\Omega^{13/2}}. \quad (9.10)$$

$\partial_\Omega I_N = 0$ の全正実根を走査すると $N = 2$ には正根がなく、 $N = 1, 3$ には次の連続枝が各一つある。

g	$\Omega_{\text{PMS}}^{(1)}$	$\Omega_{\text{PMS}}^{(3)}$
0.05	1.112372	1.212272
0.10	1.207107	1.374451
0.20	1.366025	1.631074
0.40	1.618034	2.019426
0.60	1.822876	2.327015
1.00	2.158312	2.823067

root tracking は前の g の解を初期値にし、同時に全正根の bracket scan を行う。偶数次数で根がないことを隠して complex root を実根として選ばない。

R.5 ODM の独立実装

問題

$g = \rho\lambda/(1-\lambda)^2$ の ODM を実装し root continuity の意味を説明せよ。

解答

quadratic equation $g(1-\lambda)^2 = \rho\lambda$ のうち $g \rightarrow 0$ で $\lambda \rightarrow 0$ となる枝を選ぶ。weak series を代入すると

$$c_0 = 1, \quad c_n(\rho) = \sum_{k=1}^n a_k \rho^k \binom{n+k-1}{n-k} \quad (n \geq 1), \quad (9.11)$$

従って $c_N(\rho_N) = 0$ の正根を全て求め $I_N = \sum_{n=0}^N c_n(\rho_N) \lambda(g, \rho_N)^n$ を評価する。実装の検算は (i) λ 展開を再度 g へ戻し $a_0, \dots, a_N$ を再現、(ii) polynomial residual $|c_N(\rho_N)|$ 、(iii) working precision、で行う。order N ごとに別の根を最小誤差だけで選ぶと、写像する analytic domain 自体が不連続に変わり sequence I_N の意味がなくなる。根は N と g の homotopy で同じ枝を追い、消滅時にはその事実を報告する。

R.6 dispersion relation から large order

問題

instanton discontinuity を代入し A の冪を含めて係数漸近を導け。

解答

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} F(-s + i0)}{s^{n+1}} ds, \quad (9.12)$$

$$\operatorname{Im} F(-s + i0) \sim C s^{-b} e^{-A/s}. \quad (9.13)$$

へ代入する。 $u = A/s$ 、 $s = A/u$ 、 $ds = -Au^{-2} du$ なので

$$a_n \sim \frac{(-1)^{n+1}C}{\pi} \int_0^\infty s^{-n-b-1} e^{-A/s} ds \quad (9.14)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}C}{\pi} A^{-n-b} \int_0^\infty u^{n+b-1} e^{-u} du \quad (9.15)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}C}{\pi A^{n+b}} \Gamma(n+b). \quad (9.16)$$

A^{-n} だけでなく fluctuation prefactor s^{-b} が追加の A^{-b} と $\Gamma(n+b)$ を作る。

R.7 Rosen–Morse における instanton action の対応物

問題

inverted Rosen–Morse で $A = 1/4$ に代わる WKB action と Stokes multiplier を同定せよ。

解答

spectral curve

$$y^2 = 2m \left[\frac{U_0}{\cosh^2(\beta x)} - E \right] \quad (9.17)$$

の relevant turning points x_1, x_2 を、選んだ outgoing sheet 上で結ぶ open action

$$A_R(E) = \int_{x_1}^{x_2} y(x, E) dx \quad (9.18)$$

(または同じ homology class の半 closed Voros period) が zero-dimensional 例の定数 $1/4$ を置き換える。実際の nonperturbative factor は $e^{-2A_R(E)/\hbar}$ であり、periodicity $x \mapsto x + i\pi/\beta$ による複数 turning-point image も含めて Borel singularities を作る。単純 turning point の Stokes multiplier と propagation $e^{\pm A_R/\hbar}$ を path order で掛けた incoming entry が $\mathcal{C}_{\text{in}}(E)$ 。exact solution ではその積が

$$\mathcal{C}_{\text{in}}(k) \propto \frac{\Gamma(1 - ik/\beta)\Gamma(-ik/\beta)}{\Gamma(-ik/\beta - s)\Gamma(-ik/\beta + s + 1)} \quad (9.19)$$

へ resummation される。従って Gamma denominator の pole は、quantum action と Stokes multiplier を含む exact-WKB incoming coefficient の零点である。

記号の最終確認

作用素の等式は指定された定義域上で読む。連続スペクトル上の $\mathcal{R}(E \pm i0)$ は境界値であり、 L^2 上の通常の逆作用素ではない。共鳴極はシートと境界条件を指定して初めて意味を持つ。有限基底の複素固有値は、変形角・基底・切断を変えた安定性試験を通過した場合にのみ共鳴と同定する。